Esercizi del corso di Fisica Quantistica (secondo modulo)

Anno Accademico 2023-2024

Maria Archidiacono, Marco Zaro

Ultima modifica: 18 dicembre 2023

1. È data una buca di potenziale cubica, tale che

$$V(\vec{x}) = \sum_{i=1,3} V_0\, \theta(L/2 - |x_i|)\,, \tag{1}$$

con $V_0 \to \infty$.

a) Scrivere l'Hamiltoniana per il problema, e separarla in termini di Hamiltoniane monodimensionali.

b) Risolvere l'equazione agli autovalori dell'Hamiltoniana, derivandone autofunzioni e autovalori dell'energia.

c) Calcolare la degenerazione per i seguenti autovalori di energia:

$$E = 3\bar{E}\,, \quad E = 6\bar{E}\,, \quad E = 9\bar{E}\,, \quad E = 10\bar{E}\,, \quad E = 14\bar{E}\,, \tag{2}$$

dove $\bar{E}$ indica il livello di energia dello stato fondamentale di una buca infinita monodimensionale.

2. Due particelle di massa m vincolate a una retta sono soggette al potenziale (scritto in termini delle posizioni sulla retta di ciascuna particella)

$$V(x_1, x_2) = K(5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2)\,, \quad K > 0\,. \tag{3}$$

Determinare lo spettro di energia del sistema, la sua degenerazione e la forma delle autofunzioni.

3. Una traslazione in n dimensioni può essere scritta come

$$T(\vec{l}) = \exp(-i\hbar\vec{l}\cdot\vec{p})\,. \tag{4}$$

Calcolare il commutatore $[\vec{x}, T(\vec{l})]$ e gli elementi di matrice $\langle\vec{y}'|\vec{x}|\vec{y}\rangle$, dove $|\vec{y}\rangle = T(\vec{l})|\vec{x}\rangle$ e $|\vec{y}'\rangle = T(\vec{l})|\vec{x}'\rangle$.

4. In un sistema a due particelle, sono dati gli operatori di parità e di scambio, $\mathcal{P}$, $\mathcal{S}$, definiti come:

$$\langle\vec{x}_1, \vec{x}_2|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-\vec{x}_1, -\vec{x}_2)\,, \tag{5}$$
$$\langle\vec{x}_1, \vec{x}_2|\mathcal{S}|\psi\rangle = \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)\,. \tag{6}$$

Determinare la loro azione sulla base delle coordinate del baricentro e relativa ($\vec{R}$, $\vec{r}$), ovvero determinare gli elementi di matrice

$$\langle\vec{R}, \vec{r}|\mathcal{P}|\psi\rangle\,, \qquad \langle\vec{R}, \vec{r}|\mathcal{S}|\psi\rangle\,. \tag{7}$$

5. Partendo dalla definizione delle componenti del momento angolare $L_i = \epsilon^{ijk} x_j p_k$, determinare i commutatori $[L_i, x_j]$ e $[L_i, p_j]$. Utilizzare il risultato per verificare che
$$[\vec{L}^2, \vec{x} \cdot \vec{p}] = 0 \,, \tag{8}$$
e dedurre che ciò implica che $[\vec{L}^2, p_r] = 0$.

6. Verificare l'Hermiticità dell'operatore impulso radiale, la cui azione nella base delle coordinate è definita come
$$p_r = -i\hbar \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \,, \tag{9}$$
Verificanre esplicitamente che
$$\langle \phi | p_r | \psi \rangle = \langle \phi | p_r^\dagger | \psi \rangle \,, \tag{10}$$
dove $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ sono due stati generici. Che condizioni devono soddisfare le funzioni d'onda radiali?
Come deve cambiare l'espressione di p_r, affinchè resti autoaggiunto, andando in un numero arbitrario di dimensioni?
Suggerimento: La misura di integrazione in n dimensioni, $d^n x$, può essere scritta come $d^n x = r^{n-1}\, dr\, d^{n-1}\Omega$, dove $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ e $d^{n-1}\Omega$ è l'elemento di superficie infinitesimo sulla $n-1$-sfera.

7. Dimostrare che, negli autostati simultanei $|l, m\rangle$ del quadrato del momento angolare L^2 e di una sua componente L_z, i valori medi delle altre componenti sono nulli. Calcolare l'indeterminazione delle altre componenti, verificando che il principio di indeterminazione è soddisfatto.
Suggerimento: Essendo arbitraria la scelta degli assi x, y, z, utilizzare $\Delta L_x^2 = \Delta L_y^2$.

8. Sono date le funzioni d'onda
$$\phi(\vec{x}) = \phi(r) \,, \tag{11}$$
$$\psi(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}\, \phi(r) \,, \tag{12}$$
dove $\vec{a}$ è un vettore di coefficienti complessi, tali che $\sum_i |a_i|^2 = 1$.

   a) Per entrambe le funzioni d'onda, calcolare il valore medio delle componenti L_i del momento angolare orbitale.
   b) Dimostrare che $\phi(\vec{x})$ è autofunzione delle tre componenti del momento angolare
   c) Dimostrare $\psi(\vec{x})$ e $\phi(\vec{x})$ sono entrambe autofunzioni di L^2. Quanto valgolo gli autovalori di l corrispondenti?

9. Considerare il passaggio dalla base cartesiana (quella in cui le matrici di spin 1 S_i hanno elementi $(S_i)_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk})$) alla base degli autostati di S_z. Determinare le matrici S_i in questa base, e la matrice di cambiamento di base.

10. Per una particella di spin 1, l'Hamiltoniana dell'interazione con un campo magnetico $\vec{B}$ è data da
$$H = g\vec{B} \cdot \vec{S} \,. \tag{13}$$

   a) Determinare gli autostati di H.
   b) Calcolare l'operatore di evoluzione temporale.

c) Al tempo iniziale, il sistema è preparato nello stato $|+\rangle$ tale che $S_x|+\rangle = \hbar|+\rangle$. Calcolare il valore medio di $\vec{S}$, a ogni tempo, nello stato dato. Verificare che si ottiene lo stesso risultato decomponendo $|+\rangle$ sugli autostati di H oppure applicando l'operatore di evoluzione temporale calcolato al punto precedente.

d) Calcolare la probabilità di *spin-flip*, ovvero la probabilità che lo stato dato venga rilevato in $|-\rangle$, tale che $S_x|-\rangle = -|-\rangle$.

Suggerimento: Per i punti b) e c), si può considerare, senza perdita di generalità, il caso in cui $\vec{B} \parallel \hat{z}$.

11. Ripetere l'Es.10 nel caso di una particella di spin 1/2.

12. Considerare una particella di spin 1/2 in un campo magnetico orientato lungo l'asse z. La dinamica del sistema è governata dall'Hamiltoniana

$$H = g\vec{B} \cdot \vec{S} = \omega S_z \,, \tag{14}$$

dove $\omega = gB_z$.

a) Considerare l'operatore di evoluzione temporale, e collegarlo a un operatore di rotazione. Quanto vale l'angolo di rotazione?

b) Assumendo che al tempo $t = 0$ lo stato del sistema sia tale che

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \,, \tag{15}$$

Calcolare, sempre al tempo iniziale, $\langle S_y \rangle$.

c) Utilizzando il risultato al primo punto, mostrare che l'evoluzione temporale fa *precedere* lo spin nel piano $x-y$, ovvero che i valori medi di S_x, S_y descrivono un cerchio al variare del tempo, con periodo $T_{prec} = \frac{2\pi}{\omega}$.

d) Dato uno stato arbitrario al tempo iniziale, decomporlo sugli autostati di H e mostrare che ritorna in se stesso (con lo stesso segno) dopo $T_{ket} = \frac{4\pi}{\omega}$. Interpretare il risultato.

e) Supporre ora che un fascio di particelle di spin 1/2 (ad es neutroni) al tempo iniziale sia diviso in due parti, A,B. Di queste, solo la parte B passa in una regione in cui è presente campo magnetico. Successivamente, al tempo T le due parti sono riunite. Mostrare che, se con un valore del campo magnetico $B_z = B_z^0$ l'interferenza tra i due fasci è costruttiva, lo sarà anche per $B_z = B_z^0 + \Delta B_z$, con $\Delta B_z = \frac{4\pi}{gT}$. Quando invece l'interferenza è distruttiva?
Si vedano Rauch et al., *Phys. Lett.* **54A**, 425(1975); Werner et al., *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1053(1975).

13. Un nucleo di carica Q avente spin 3/2 e situato nell'origine è assoggettato a un campo elettrico esterno inomogeneo. Si assuma un'interazione di quadrupolo elettrico nella forma

$$H = \frac{eQ}{2s(s-1)\hbar^2} \left[\partial_x^2 \phi|_{\vec{x}=0}\, S_x^2 + \partial_y^2 \phi|_{\vec{x}=0}\, S_y^2 + \partial_z^2 \phi|_{\vec{x}=0}\, S_z^2 \right] \,, \tag{16}$$

dove ϕ è il potenziale elettrostatico.
Assumendo che ϕ soddisfi l'equazione $\partial_x^2\phi + \partial_y^2\phi + \partial_z^2\phi = 0$, mostrare che H può essere riscrita nella forma

$$H = \alpha(3S_z^2 - S^2) + \beta(S_+^2 + S_-^2) \,. \tag{17}$$

Determinare gli autostati di H espressi nella base degli autostati simultanei di S^2 e S_z, e discutere eventuali degenerazioni.

14. Considerare i seguenti casi di composizione di momenti angolari:

    a) Tre particelle di spin 1/2.
    b) Una particella di spin 1 e una particella di spin 1/2.
    c) Due particelle di spin 1.

    In tutti i casi, determinare autovalori e autostati del momento angolare totale J^2 e della sua componente lungo l'asse z, nella base degli stati prodotto tensoriale degli autostati di spin di particella singola.

15. Tenendo conto di quanto ottenuto nel punto c) dell'esercizio precedente, date le 9 funzioni

$$f_{ij}(\vec{x}) = x_i x_j f(r) \,, \tag{18}$$

    classificare le loro combinazioni lineari in termini dell'autovalore di $|\vec{L}|^2$. Sono presenti tutti i valori possibili di l? Perchè? Per quelli presenti, verificare che la dimensione del sottospazio corrisponde al numero di valori possibili dell'autovalore di L_z.
    Suggerimento: Non è richiesto di calcolare autostati simultanei di $|\vec{L}|^2$ *e* L_z.

16. Determinare spettro e degenerazione per l'Hamiltoniana di un sistema di tre particelle di spin 1/2, data da

$$H = \Lambda\left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3\right) \,, \tag{19}$$

    dove $\vec{s}_i$ è il vettore delle componenti dello spin della i-esima particella.

17. Due particelle di spin 1/2 interagiscono attraverso l'Hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) + B_1\, \vec{L} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) + B_2\, \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \,, \tag{20}$$

    dove $\vec{L}$ è il momento angolare relativo delle due particelle. Separare il problema e determinare lo spettro e la degenerazione di H, assumendo noto lo spettro spettro dell'Hamiltoniana radiale, e che la sua degenerazione sia dovuta solo a L_z.

18. Calcolare il commutatore tra il generatore delle dilatazioni

$$v = \frac{\vec{x} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{x}}{2} \,, \tag{21}$$

    e un'Hamiltoniana H generica. Mostrare che, negli autostati di H, vale la relazione

$$2\langle T \rangle = \langle \vec{x} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{x}) \rangle \,. \tag{22}$$

    Discutere questo risultato nel caso particolare di un potenziale V che sia una funzione omogenea di grado k nelle coordinate, cioè tale che

$$\sum_j x_j \partial_j V(\vec{x}) = kV(\vec{x}) \,. \tag{23}$$

    Commentare i casi dell'oscillatore armonico e del potenziale Coulombiano.

19. Ripetere l'esercizio precedente calcolando la dipendenza di valor medio di potenziale (nel caso in cui esso sia omogeneo nelle coordinate) e dell'energia cinetica quando si effettua una dilatazione $\vec{x} \to \lambda\vec{x}$. Come cambia il valore medio di H in uno stato stazionario sotto dilatazioni? Cosa accade se $V \sim \frac{1}{r^\beta}$ con $\beta > 2$?

20. La dinamica di un sistema fisico è assimilabile a quella di due oscillatori armonici monodimensionali disaccoppiati. Per ciascuno dei due oscillatori armonici posso definire l'operatore numero in termini degli operatori creazione e distruzione corrispondenti, $N_i = a_i^\dagger a_i$, con $i = \pm$. Lo stato di vuoto $|0,0\rangle$ è definito dalla relazione

$$a_+|0,0\rangle = a_-|0,0\rangle = 0\,. \tag{24}$$

Partendo da esso, si possono ottenere autostati simultanei dei due operatori numero

$$|n_+, n_-\rangle = \frac{\left(a_+^\dagger\right)^{n_+}\left(a_-^\dagger\right)^{n_-}}{\sqrt{n_+!}\sqrt{n_-!}}|0,0\rangle\,, \tag{25}$$

che interpretiamo come formati da $n_\pm$ particelle di spin 1/2 con $s_z = \pm\hbar/2$. La componente z del momento angolare del sistema è

$$J_z = \frac{\hbar}{2}\left(N_+ - N_-\right)\,, \tag{26}$$

Se si introductono gli operatori $J_\pm$ che scambiano una particella di spin $\mp\hbar/2$ con una di spin $\pm\hbar/2$,

$$J_\pm = \hbar a_\pm^\dagger a_\mp\,. \tag{27}$$

Allora:

a) Mostrare che, note le usuali relazioni di commutazione tra gli operatori di creazione/distruzione, $J_\pm$ e J_z soddisfano le relazioni di commutazione dei momenti angolari. Scrivere inoltre l'espressione delle rimanenti componenti J_x, J_y e verificare che, in generale, si ha

$$J^a = \sum_{i,j=\pm}\frac{\hbar}{2}a_i^\dagger\sigma_{ij}^a a_j\,. \tag{28}$$

b) Calcolare il momento angolare totale $|\vec{J}|^2$ e mostrare che può essere diagonalizzato simultaneamente all'operatore numero $N = N_+ + N_-$, e quindi all'Hamiltoniana del sistema.

c) Mostrare che l'azione di $J_\pm$ su uno stato della forma in Eq. 25 (attenzione alle costanti di normalizzazione!) è quella degli operatori di innalzamento/abbassamento del momento angolare, e ricavare j, m in termini di $n_\pm$.

d) Mostrare che anche le singole componenti J^a commutano con N e calcolare la degenerazione del sistema in un autostato di N.

e) Se ora interpretiamo il sistema come un oscillatore armonico bi-dimensionale, mostrare che una delle componenti J^a è proporzionale al generatore delle rotazioni nel piano $+-$, ma corrispondente a autovalori *interi* del momento angolare. Utilizzare questo fatto per ri-derivare la degenerazione del sistema, verificando che corrisponde a quanto ottenuto nei punti precedenti.

21. La funzione d'onda radiale dello stato fondamentale di un atomo d'idrogeno è

$$\phi_{1,0}(r) = N_{10}\exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)\,. \tag{29}$$

a) Si calcoli la costante di normalizzazione N_{10}.

b) Si calcoli valore medio di r e la sua varianza, e il valore medio di $1/r$.

c) Per quale valore di r la densità di probabilità radiale è massima?

22. Un sistema a due livelli ha la seguente Hamiltoniana:

$$H = E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2| + \lambda V\left(|2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2|\right) . \tag{30}$$

a) Ottenere gli autovalori e gli autostati di H in maniera esatta.

b) Trattando λ come un parametro piccolo, utilizzare la teoria delle perturbazioni per ottenere la correzione ai livelli energetici e agli stati al primo ordine non nullo, e confrontare con il caso esatto.

c) Mostrare che la perturbazione aumenta la differenza in energia dei due stati.

23. In un oscillatore armonico unidimensionale, con Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 , \tag{31}$$

la frequenza delle oscillazioni viene leggermente modificata, $\omega' = \omega\sqrt{1+\epsilon}$, cosicchè il nuovo potenziale a cui il sistema è soggetto diventa $V = \frac{1}{2}m\omega'^2 x^2$.

a) Calcolare le correzioni all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine in ϵ, dimostrando che solo lo stato fondamentale e il secondo stato eccitato dell'Hamiltoniana imperturbata vi contribuiscono.

b) Calcolare le correzioni allo stato fondamentale all'ordine ϵ.

c) Confrontare con il caso esatto, calcolando la funzione d'onda dello stato fondamentale. A tal fine ricordare la forma funzionale dei seguenti stati dell'oscillatore armonico:

$$\langle x|0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{x_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) , \tag{32}$$

$$\langle x|2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi^{1/4}\sqrt{x_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)\left(-2+4\frac{x^2}{x_0^2}\right) , \tag{33}$$

dove $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

24. Un atomo d'idrogeno è soggetto in un campo elettrico uniforme diretto lungo l'asse z, il cui modulo è indicato con E. Tale campo genera un potenziale

$$V = -ezE . \tag{34}$$

Considerando il livello energetico con $n = 2$, determinare l'azione di tale perturbazione. La degenerazione di tale livello è completamente risolta? Lo splitting dei livelli dell'atomo di idrogeno ad opera di un campo elettrico esterno è noto come *effetto Stark lineare*.
Suggerimento: Per il calcolo degli elementi di matrice del potenziale, utilizzare il fatto che la parità delle armoniche sferiche è data da l, oppure ricordarsi del teorema di Wigner-Eckart.
Per il calcolo esplicito degli elementi di matrice (verificare che l'unico non nullo è pari a

$3a_0 Ee$), si vedano qui sotto alcune autofunzioni dell'atomo di idrogeno (dove $\bar{r} = r/a_0$) e armoniche sferiche:

$$\begin{aligned}
\phi_{1,0}(r) &= \frac{2}{a_0^{3/2}}\, e^{-\bar{r}}\,, \\
\phi_{2,0}(r) &= \frac{1}{2\sqrt{2}a_0^{3/2}}\,(2-\bar{r})\, e^{-\frac{\bar{r}}{2}}\,, \\
\phi_{2,1}(r) &= \frac{1}{2\sqrt{6}a_0^{3/2}}\,\bar{r}\, e^{-\frac{\bar{r}}{2}}\,, \\
Y_{0,0}(\theta,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,, \\
Y_{1,\pm 1}(\theta,\phi) &= \mp\frac{3}{\sqrt{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}\,, \\
Y_{1,0}(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,.
\end{aligned} \tag{35}$$

25. Nello stesso scenario dell'esercizio precedente, si scriva la correzione al primo ordine allo stato fondamentale $|1,0,0\rangle$ dell'atomo di idrogeno indotta dalla perturbazione.

    a) Utilizzare il risultato per calcolare, sempre al primo ordine, il valore medio del momento di dipolo elettrico
    $$\vec{d}_e = -e\langle 1,0,0|\vec{x}|1,0,0\rangle\,, \tag{36}$$
    mostrando che esso è non nullo solo lungo l'asse z.

    b) Definita la polarizzabilità come
    $$\alpha = \frac{|\vec{d}_e|}{E} \tag{37}$$
    ricavarne un limite superiore dimostrando e utilizzando la seguente relazione per l'atomo d'idrogeno:
    $$\frac{1}{E_n - E_1} \leq \frac{4}{3|E_1|}\,. \tag{38}$$

26. Considerare due atomi di idrogeno. Assumendo i protoni fissi a una distanza $\vec{r}$ (orientato come l'asse z), possiamo scrivere l'Hamiltoniana come
    $$H = H_0 + V\,. \tag{39}$$
    H_0 è la somma delle due Hamiltoniane dei singoli atomi di idrogeno, $H_0 = H_1 + H_2$ con
    $$H_i = \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} - \frac{e^2}{r_i}\,. \tag{40}$$
    V contiene le interazioni (repulsive) tra i due protoni, tra i due elettroni e quelle (attrattive) tra ciascun protone e l'elettrone dell'altro atomo:
    $$V = \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{|\vec{r}+\vec{r}_2-\vec{r}_1|} - \frac{e^2}{|\vec{r}+\vec{r}_2|} - \frac{e^2}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\,. \tag{41}$$

    a) Scrivere la funzione d'onda dello stato fondamentale dell'Hamiltoniana H_0.

    b) Espandere il potenziale per $r \gg r_i$ al primo ordine non nullo, mostrando che
    $$V = -\frac{e^2}{r^3}\left(x_1x_2 + y_1y_2 - 2z_1z_2\right)\,. \tag{42}$$

c) Mostrare che al primo ordine la perturbazione ha valor medio nullo nello stato fondamentale ottenuto al punto a).

d) Scrivere l'espressione per il secondo ordine della correzione ai livelli energetici indotta dalla perturbazione, mostrando che è diverso da zero e che scala come $\frac{1}{r^6}$ (Interazione di Van-der-Waals). Non si richiede il calcolo esplicito degli elementi di matrice.

27. Un sistema a due livelli, con

$$H_0 = E|+\rangle\langle+| - E|-\rangle\langle-| \,, \tag{43}$$

è soggetto a un potenziale oscillante che mescola i livelli energetici:

$$V(t) = \gamma e^{i\omega t}|-\rangle\langle+| + \gamma e^{-i\omega t}|+\rangle\langle-| \,. \tag{44}$$

Assumendo che a $t = 0$ solo lo stato $|-\rangle$ sia popolato, utilizzare la rappresentazione d'interazione per calcolare le probabilità che il sistema rimanga in $|-\rangle$ al tempo t, oppure che venga rilevato in $|+\rangle$. Mostrare che vale la relazione (nota come formula di Rabi):

$$P_+(t) = \frac{\gamma^2}{\hbar^2\Omega^2}\sin^2\Omega t \,, \tag{45}$$

con

$$\Omega = \sqrt{\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega-\omega_\pm)^2}{4}} \,, \qquad \omega_\pm = \frac{E_+ - E_-}{\hbar} = \frac{2E}{\hbar} \,. \tag{46}$$

Quando è massima l'ampiezza delle oscillazioni? Calcolare il valore medio di H_0 al variare di t, mostrando che il sistema assorbe o cede energia al potenziale, in maniera periodica.

28. Mostrare che Una matrice 2×2 a coefficienti complessii, M, si può scrivere in maniera unica come combinazione lineare delle matrici σ^μ, dove $\sigma^0 = \mathbf{I}$ e σ^i, $i = 1,2,3$ sono le matrici di Pauli.
Utilizzando le proprietà delle matrici di Pauli, mostrare che i coefficienti della combinazione lineare sono collegati a $\mathrm{Tr}(M\sigma^\mu)$. Infine, dai risultati precedenti, mostrare che essi implicano l'*identità di Fiertz* per le matrici di Pauli:

$$\sum_{a=1}^{3}\sigma^a_{ij}\sigma^a_{kl} = 2\delta_{il}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{kl} \,. \tag{47}$$

29. Una particella di carica q e massa μ è soggetta a un campo di forze che genera un potenziale approssimabile a un oscillatore armonico isotropo, $V = \mu\omega^2 r^2/2$.

a) Mostrare che il momento di dipolo elettrico del sistema in una direzione generica (si assuma lungo l'asse z), $d = qz$ soddisfa la relazione

$$\sum_{n',l',m'}(E_n - E'_n)\left|\langle nlm|d|n'l'm'\rangle\right|^2 = -\frac{\hbar^2 q^2}{2\mu} \,. \tag{48}$$

Suggerimento: Calcolare il commutatore $[[H,z],z]$ *e prenderne il valore medio su* $|nlm\rangle$.

b) Calcolare esplicitamente

$$\sum_{n',l',m'}(E_0 - E'_n)\left|\langle 000|d|n'l'm'\rangle\right|^2 \,, \tag{49}$$

Utilizzando la forma delle autofunzioni radiali dell'oscillatore armonico

$$\xi_{00}(r) = \frac{2\gamma^{3/4}}{\pi^{1/4}}\, e^{-r^2\gamma/2}\,, \quad \xi_{11}(r) = \sqrt{\frac{2\gamma}{3}}\, r\, \xi_{00}(r)\,, \tag{50}$$

(con $\gamma = \frac{\mu\omega}{\hbar}$), e eventualmente le armoniche sferiche riportate in Eq. 35

c) Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale quando il sistema viene perturbato da un campo elettrico $V = qEz$, al primo ordine non nullo, utilizzando sia le coordinate sferiche che quelle cartesiane.

d) Mostrare che, il valore medio dell'energia potenziale (imperturbata) non riceve correzioni al primo ordine perturbativo.

30. Un sistema è perturbato con un potenziale oscillante nel tempo

$$V(t) = V e^{i\omega t} + V^\dagger e^{-i\omega t}\,. \tag{51}$$

Utilizzando la teoria perturbativa dipendente dal tempo, calcolare al primo ordine la velocità di transizione (probabilità di transizione per unità di tempo). Mostrare che essa è composta da due termini, uno corrispondente ad un assorbimento di energia di $\hbar\omega$ e uno corrispondente all'emissione della stessa quantità, che si interpretano come emissione e assorbimento stimolati dal potenziale. Mostrare che sussiste la relazione

$$\frac{\text{Velocità emissione}}{\text{densità stati finali con } E_f = E_i - \hbar\omega} = \frac{\text{Velocità assorbimento}}{\text{densità stati finali con } E_f = E_i + \hbar\omega}\,, \tag{52}$$

detta equazione di bilancio dettagliato.

31. Un atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale, a partire dal tempo $t = 0$ è soggetto a un campo elettrico uniforme e dipendente dal tempo, che genera la perturbazione

$$V = -eEz\, e^{-t/\tau}\,. \tag{53}$$

Calcolare la probabilità che il sistema venga rilevato nel primo stato eccitato. Quali saranno i valori di l, m? Autofunzioni radiali e armoniche sferiche sono riportate nelle Eq. 35.

32. Il sistema dell'Es. 29 è perturbato a partire dal tempo $t = 0$ con un campo elettrico oscillante nel tempo, che genera il potenziale

$$V(t) = qEz \cos(\tilde{\omega} t)\, e^{-t/\tau}\,. \tag{54}$$

Calcolare la probabilità di trovare il sistema, preparato inizialmente nello stato fondamentale, in un qualsiasi stato eccitato a tempi molto grandi. Al primo ordine in teoria perturbativa dipendente dal tempo, quali stati eccitati si possono raggiungere?

33. Utilizzando l'approssimazione di Born, calcolare la sezione d'urto su un potenziale generato da un dipolo elettrico:

$$V(\vec{x}) = \frac{e^2}{|\vec{x} + \vec{a}|} - \frac{e^2}{|\vec{x} - \vec{a}|}\,. \tag{55}$$

34. Due particelle identiche sono entrambe in uno stato di momento angolare orbitale con $l = 1$, $m = 0$. Quali sono i possibili valori del momento angolare (orbitale) totale e le probabilità che una misura dia ciascun valore? Assumendo che le particelle abbiano spin $1/2$ e che gli altri numeri quantici siano gli stessi, determinare lo spin totale e il momento angolare totale del sistema.

35. Sono date N particelle identiche, tra di loro non interagenti. L'Hamiltoniana del sistema è somma di Hamiltoniane di particella singola, di cui si assume lo spettro discreto e noto. Trovare l'energia degli stati fondamentali nei seguenti casi:

    a) Particelle di spin 0;

    b) Particelle di spin 1/2;

    c) Particelle di spin 3/2.

    Nei primi due casi, per $N = 3$, scrivere esplicitamente l'autofunzione dello stato fondamentale.

36. In un sistema di N particelle, con funzione d'onda totale $\Psi(x_1, \ldots, x_N; t)$, la corrente di probabilità per la particella i è

$$\vec{J}_i(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N; t) = \frac{-i\hbar}{2m_i} \left(\Psi^* \nabla_i \Psi - \Psi \nabla_i \Psi^*\right) . \tag{56}$$

    a) Mostrare che la densità di probabilià $\rho(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N; t) = |\Psi|^2$ soddisfa l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i \cdot \vec{J}_i = 0 \tag{57}$$

    b) Assumendo che le particelle siano identiche (fermioni o bosoni), come si comporta ρ sotto scambio di due particelle? Mostrare che la quantità

$$\rho^1(\vec{x}, t) = \langle \Psi(t) | \delta(\vec{x} - \vec{x}_j) | \Psi(t) \rangle \tag{58}$$

    non dipende da j e rappresenta la probabilità di trovare *una* particella alla posizione $\vec{x}$ e al tempo t.

    c) Se introduciamo un operatore "densità di particella" (gli operatori sono denotati con $\hat{}$ e si tralasciano i segni di vettore)

$$\hat{\rho}(\hat{x}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta(\hat{x} - \hat{x}_j) \,, \tag{59}$$

    e un operatore "densità di corrente"

$$\hat{J}(\hat{x}) = \frac{1}{2mN} \sum_{j=1}^{N} \left[\hat{p}_j \delta(\hat{x} - \hat{x}_j) + \delta(\hat{x} - \hat{x}_j) \hat{p}_j\right] , \tag{60}$$

    mostrare che

$$\langle \hat{\rho}(\hat{x}) \rangle = \rho^1(x) \,, \qquad \langle \hat{J}(\hat{x}) \rangle = J(x) \,. \tag{61}$$

    Mosrare infine che si può promuovere l'equazione di continuità agli operatori, nel senso

$$\frac{i}{\hbar}[H, \hat{\rho}] = -\nabla \cdot \hat{J} \,. \tag{62}$$

37. Utilizzando l'approssimazione WKB, calcolare i livelli energetici nel caso della buca infinita di potenziale e nel caso dell'oscillatore armonico unidimensionale. Confrontare con il risultato esatto.