Esame di Fisica Quantistica

Non sono ammessi libri o appunti.

Proff. G. Ferrera, M. Zaro, 24 Gennaio 2024

La dinamica di un elettrone, soggetto a un potenziale centrale $V(r)$, è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2M}\left(\vec{p} - \alpha\vec{A}(\vec{r})\right)^2 + V(r)\,. \tag{1}$$

Interpretiamo $\vec{A}(\vec{r})$ come potenziale vettore, e assumiamo soddisfatta la condizione di gauge $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$.

1. Calcolare il commutatore $[\vec{A}, \vec{p}]$ e mostrare che $\vec{p}\cdot\vec{A} = \vec{A}\cdot\vec{p}$.
   Dato
   $$\vec{A} = -\frac{1}{2}B\begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$
   Riscrivere H e mostrare che essa assume la forma
   $$H = H_0 + H_1 + H_2\,,\ \text{dove} \qquad H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2M} + V(r)\,, \qquad H_1 = -\frac{\alpha}{2M}BL_z\,, \tag{3}$$
   e H_2 è proporzionale a $B^2(x^2 + y^2)$. Da qui in avanti, trascureremo il termine H_2.
2. Trascuriamo lo spin e assumiamo noto e non degenere lo spettro della parte radiale di H_0. Cosa possiamo dire della dipendenza angolare delle sue autofunzioni? C'è una degenerazione? Discutere come il termine H_1 modifica gli autovalori di energia dell'hamiltoniana H_0. Scrivere, in maniera esatta, le autofunzioni di energia corrispondenti ai nuovi autovalori per l'Hamiltoniana $H_0 + H_1$. C'è degenerazione?
3. Considerando ora l'interazione tra spin e momento angolare, dapprima del caso in cui $B = 0$,
   $$H_{LS} = \frac{F(r)}{2M}\vec{L}\cdot\vec{S}\,, \tag{4}$$
   discutere come essa modifica lo spettro di H_0. Discutere se si può ottenere il risultato in maniera esatta come al punto precedente, oppure se occorre utilizzare la teoria perturbativa. Nel primo caso, scrivere autovalori e autofunzioni esatti, nel secondo darne la prima correzione non nulla. In entrambi i casi, discutere la degenerazione del risultato.
4. Nel caso in cui $B \neq 0$ e non si trascuri lo spin, H_1 diventa
   $$H_1 = -\frac{\alpha}{2M}B(L_z + 2S_z)\,, \tag{5}$$
   dove il fattore 2 è il fattore giromagnetico dell'elettrone. È possibile diagonalizzare simultaneamente H_{LS} e H_1? In caso affermativo, trovare le autofunzioni comuni, in caso contrario, spiegare perchè non è possibile.
5. Tralasciando la dinamica radiale, nel caso in cui H_1 possa essere trattata come una perturbazione, calcolare le correzioni agli autovalori di energia di $H_0 + H_{LS}$.
6. Ripetere la domanda precedente nel caso in cui H_{LS} sia la perturbazione, e $H_0 + H_1$ l'hamiltoniana di cui lo spettro è noto esattamente.
7. **Solo per chi svolge la seconda prova in itinere:** dimostrare che, dati 3 operatori A, B, C tali che $[A, B] = [A, C] = 0$ ma $[B, C] \neq 0$, allora lo spettro di A è degenere.

   Solo per chi svolge la prova totale: dimostrare che due operatori A, B commutano se e solo se ammettono una base comune di autovettori.

Può essere utile la relazione

$$|j = l\pm 1/2,\, j_z,\, l,\, s = 1/2\rangle = \pm C_+^{\pm}\,|l,\, s = 1/2,\, m = j_z - 1/2,\, s_z = 1/2\rangle + C_-^{\pm}\,|l,\, s = 1/2,\, m = j_z + 1/2,\, s_z = -1/2\rangle\,, \tag{6}$$

Dove

$$C_+^{\pm} = \sqrt{\frac{l \pm j_z + \frac{1}{2}}{2l+1}}\,, \qquad C_-^{\pm} = \sqrt{\frac{l \mp j_z + \frac{1}{2}}{2l+1}}\,. \tag{7}$$

* Solo seconto modulo (8 crediti).

† Resta valido il voto della prima prova.