

Esame di Fisica Quantistica

Non sono ammessi libri o appunti.

Prof. G. Ferrera, M. Zaro, 23 Luglio 2024

L'hamiltoniana di un sistema d dimensionale è data da

$$H_d = \hbar\omega \sum_{i=1}^d a_i^\dagger a_i, \quad (1)$$

dove gli operatori \vec{a}, \vec{a}^\dagger soddisfano le relazioni di commutazione $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$.

1. Determinare, nel caso monodimensionale, autovalori e autostati dell'hamiltoniana.
2. Determinare autovalori e autostati di H_d nel caso d dimensionale in termini di quelli ottenuti al punto 1.
3. Dato l'operatore

$$\Pi = \exp\left(i\pi \frac{H_d}{\hbar\omega}\right), \quad (2)$$

come agisce sugli autostati di H_d ? Calcolando gli elementi di matrice tra autostati di H_d , mostrare che $\Pi^\dagger a_i \Pi = -a_i$.

4. *D'ora in poi assumere $d = 3$*
Calcolare la degenerazione di un generico livello energetico, e verificare il calcolo nei casi dello stato fondamentale e dei primi due stati eccitati.
5. Calcolare i commutatori $[H_d, O_{ij}]$ e $[O_{ij}, O_{kl}]$, dove $O_{ij} = a_i^\dagger a_j$, e commentare il risultato rispetto a quanto ottenuto al punto precedente.
6. Dati gli operatori $V_i = -i\hbar\epsilon_{ijk}O_{jk}$, calcolare $\epsilon_{ijk}V_k$ e il commutatore $[V_i, V_j]$
7. Calcolare anche il commutatore $[V_i, V^2]$, dove $V^2 = V_k V_k$, e discutere quanti e quali operatori tra V_i, V^2 sono compatibili. Possiamo dire qualcosa sui loro autovalori?
8. Gli operatori O_{ij} e V_k sono hermitiani? Quanti operatori O_{ij} esistono? A quante osservabili fisiche indipendenti rispetto ad H_d corrispondono?
9. Oltre all'hamiltoniana H_d , sul sistema agisce la perturbazione

$$\Delta = \frac{\alpha}{2} V_3 \quad (3)$$

Calcolare, al primo ordine in teoria perturbativa, la correzione all'energia dello stato fondamentale e al primo livello energetico.

10. Al posto della perturbazione di cui al punto precedente, al tempo $t = 0$ viene accesa la perturbazione

$$\Lambda(t) = \frac{\delta}{2} (a_3 + a_3^\dagger) e^{-t/\tau} \quad (4)$$

Se il sistema è preparato nello stato fondamentale, discutere in quali stati può essere rivelato a causa della perturbazione a un tempo t' (considerare t' molto grande)?

11. Calcolare le probabilità di transizione di cui al punto precedente.