

Esame di Fisica Quantistica

Non sono ammessi libri o appunti.

Proff. G. Ferrera, M. Zaro, 23 Giugno 2026

Il positronio è un sistema formato da un elettrone e da un positrone (cioè una particella con la stessa massa dell'elettrone ma avente carica elettrica opposta) legati dall'interazione coulombiana. L'hamiltoniana che descrive il sistema è

$$H_0 = \frac{|\vec{p}_1|^2}{2m} + \frac{|\vec{p}_2|^2}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|},$$

dove $\vec{p}_i$ e $\vec{r}_i$ sono gli operatori (vettoriali) impulso e posizione per la particella i -esima.

1. Scomporre il problema in termini di hamiltoniana baricentrale H_0^B e relativa H_0^R .
2. Determinare lo spettro di H_0^R e la sua degenerazione, identificando un sistema completo di operatori.
3. Il sistema viene preparato nel primo stato eccitato di H_0^R , in uno stato $|\psi\rangle$ tale che

$$L_x|\psi\rangle = -\hbar|\psi\rangle,$$

dove L_x è la componente del momento angolare orbitale diretta lungo x . Discutere se le informazioni sono sufficienti a determinare completamente lo stato $|\psi\rangle$ e, in caso positivo, scriverne la forma in termini degli autostati del sistema di operatori determinato al punto 2.

4. Discutere se e come la risposta al punto precedente cambierebbe qualora il sistema fosse preparato nel secondo stato eccitato di H_0^R .
5. Dimostrare la relazione $L^\pm|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|l, m\pm 1\rangle$, dove $L^\pm = L_x \pm iL_y$.
6. Sullo stato $|\psi\rangle$ del punto 3 viene effettuata una misura dapprima di L^2 , e successivamente di L_z . Determinare i risultati delle misure e le loro probabilità, chiarendo se la risposta cambierebbe qualora si scambiassero l'ordine delle misure.
7. L'elettrone e il positrone sono particelle di spin 1/2. Pertanto, oltre all'hamiltoniana H_0 , sono presenti termine di interazione spin-spin e di interazione spin-orbita:

$$H_{S_{12}} = \mu \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2, \quad H_{LS} = \rho \vec{L} \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_2).$$

Considerando $\rho = 0$ e $\mu > 0$, discutere come vengono modificati i livelli energetici e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato di H_0^R . Occorre usare la teoria delle perturbazioni?

8. Ripetere la domanda precedente con $\rho > 0$, assumendo $\rho \ll \mu$.
9. Si consideri l'hamiltoniana H' in cui l'interazione coulombiana viene sostituita da un'interazione tipo Yukawa

$$V = -\frac{e^2 \exp(-\alpha|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.$$

Determinare, partendo dagli autostati e autovalori di H_0 , lo stato fondamentale di H' all' $O(\alpha)$ e la sua energia fino all' $O(\alpha^2)$.

10. Ri-calcolare l'energia dello stato fondamentale di H' al primo ordine in teoria perturbativa senza espandere il potenziale in α . Espandendo la correzione ottenuta, confrontare con il punto precedente.
11. Come al punto precedente (quindi senza espandere il potenziale in α), scrivere la correzione allo stato fondamentale discutendo quali elementi di matrice vi contribuiscono. Non è richiesto il calcolo degli elementi di matrice.

Suggerimento:

La funzione d'onda radiale dello stato fondamentale di un atomo idrogenoide è $\phi_{00}(r) = (\pi a_0^3)^{-1/2} \exp(-r/a_0)$, dove $a_0 = \frac{\hbar^2}{mZe^2}$.