Esame di Fisica Quantistica

20 giugno 2024

Siano date due particelle di massa m, coordinate r_1 e r_2, e impulsi p_1 e p_2. La dinamica del sistema è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - \frac{g^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \ .$$

1) Considerare il sistema di riferimento del centro di massa. Scrivere l'hamiltoniana in termini dell'hamiltoniana del centro di massa e relativa.

2) Discutere l'effetto dello scambio di particelle sulla coordinata del centro di massa e relativa.

3) Determinare gli autovalori di H e la rispettiva degenerazione, nel caso in cui le particelle siano bosoni *distinguibili* di spin 0.

4) Scrivere le possibili funzioni d'onda per lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato, nel caso in cui le particelle siano due bosoni identici di spin 0, e discutere le relative degenerazioni.

5) Scrivere le possibili funzioni d'onda per lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato, nel caso in cui le particelle siano due fermioni identici di spin 1/2, e discutere le relative degenerazioni.

6) Considerare lo stato fondamentale del caso precedente e calcolare i seguenti valori medi: $\langle r \rangle$ e $\langle 1/r \rangle$, dove $\vec{r}$ è la coordinata relativa e $r = |\vec{r}|$. Calcolare l'indeterminazione di r.

7) Considerare l'hamiltoniana relativa H_r. Calcolare il commutatore $[\vec{p} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{p}, H_r]$ dove $\vec{p}$ è l'impulso associato a $\vec{r}$.

8) Utilizzare il risultato precedente per dimostrare che su un autostato di H_r vale che $\langle T \rangle = k \langle V \rangle$, dove T e V sono il termine cinetico e potenziale di H_r. Determinare k.

9) Sia $U = \exp\left\{\frac{i\lambda}{2\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{p})\right\}$. Calcolare, al primo ordine in λ, come U trasforma gli operatori $\vec{r}$ e $\vec{p}$ e calcolare il commutatore degli operatori trasformati.

10) Considerare la perturbazione

$$H' = \alpha\, |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \ ,$$

dove $\vec{S}_1$ e $\vec{S}_2$ sono gli operatori di spin delle due particelle e $\alpha \ll 1$. Calcolare lo spostamento in energia dello stato fondamentale nei casi delle domande 4) e 5).

Nota: si ricorda che la funzione d'onda radiale nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno è data da

$$R_{10}(r) = \frac{2}{r_0^{3/2}} e^{-r/r_0} \ ,$$

dove r_0 è il raggio di Bohr.