

Esame di Fisica Quantistica

Non sono ammessi libri o appunti.

Prof. G. Ferrera, M. Zaro, 20 Febbraio 2024

Si consideri un sistema di una particella di spin $1/2$.

1. Scrivere la più generale operatore densità ρ del sistema, mostrando che si può decomporre su una base costituita dall'identità I e dalle matrici di Pauli σ_i , $i = x, y, z$. Che vincoli esistono sui coefficienti, nel caso di uno stato puro o di una miscela statistica?
2. Mostrare che, in generale, è possibile ricostruire lo stato noti i valori medi delle misure di spin lungo i tre assi. Nel caso specifico di uno stato puro, mostrare che sono sufficienti due valori medi e solo il segno del terzo.
3. Determinare l'evoluzione temporale dell'operatore densità di un sistema.
4. Utilizzando il risultato precedente, mostrare che un sistema preparato in uno stato puro al tempo t_0 resta di stato puro a ogni tempo t .
5. Discutere il caso dell'operatore densità di un sistema di spin 1. Di quanti e quali operatori occorre conoscere il valore medio per determinare ρ in maniera univoca?

Si consideri ora il caso di due particelle identiche di spin $1/2$. Siano $|\pm_i^{(k)}\rangle$ gli autostati degli operatori $\sigma_i^{(k)}$ per ciascuna particella ($k = 1, 2$; $i = x, y, z$).

6. Scrivere lo stato di singoletto $|S_{tot} = 0\rangle$ in termini sia degli autostati di $\sigma_x^{(1)}, \sigma_x^{(2)}$ che di quelli di $\sigma_y^{(1)}, \sigma_y^{(2)}$.
7. Dimostrare l'invarianza sotto rotazioni dello stato di singoletto, e sfruttarla per mostrare che $\langle S_{tot} = 0 | \sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(2)} | S_{tot} = 0 \rangle = c \delta_{ij}$.
8. Determinare esplicitamente il coefficiente c del punto precedente.
9. Calcolare il valor medio di $\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}$ sullo stato $|S_{tot} = 0\rangle$.
10. Calcolare il valor medio di $\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}$ sulla miscela statistica di stati $\left\{ |+_z^{(1)}, -_z^{(2)}\rangle, P = \frac{1}{2}; |-_z^{(1)}, +_z^{(2)}\rangle, P = \frac{1}{2} \right\}$.
11. Calcolare il valor medio di $\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}$ sullo stato $|S_{tot} = 1, S_{z\ tot} = 0\rangle$.

Suggerimento: $\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}$.