Esame di Fisica Quantistica

19 gennaio 2026

Si consideri un sistema costituito da due particelle identiche di massa M. Nel sistema di riferimento del centro di massa, l'hamiltoniana è:

$$\mathcal{H}_0 = \alpha \left(\vec{L}^{\,2} + \frac{1}{2}\vec{J}^2 + \frac{\hbar}{2} J_z \right)$$

dove $\vec{L}$ è l'operatore momento angolare orbitale relativo, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è il momento angolare totale e $\vec{S}$ è lo spin totale del sistema. La costante $\alpha > 0$ ha dimensioni opportune.

1. Dimostrare quali fra gli operatori $\vec{L}^{\,2}, \vec{J}^2, L_z, S_z$ e $\vec{S}^{\,2}$ commutano con l'hamiltoniana. Definire un insieme completo di osservabili compatibili del sistema e scrivere l'espressione degli autovalori di $\mathcal{H}_0$ in funzione di opportuni numeri quantici.
2. Qual è l'effetto dell'operazione di scambio delle particelle sulla coordinata relativa $\vec{r}$?
3. Descrivere come il numero quantico orbitale l determina la simmetria della funzione d'onda spaziale $\psi(\vec{r})$ sotto lo scambio delle due particelle.
4. Si consideri il caso di due bosoni identici di spin zero. Determinare quali valori del numero quantico l sono permessi e calcolare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo livello eccitato.
5. Si supponga che il sistema di bosoni di spin zero sia preparato nello stato
$$|\psi(0)\rangle = \big(|l = 0, m_l = 0\rangle + |l = 2, m_l = 1\rangle\big)/\sqrt{2}\,.$$
Calcolare $|\psi(t)\rangle$ e discutere se le probabilità di misura di energia cambiano nel tempo.
6. Calcolare il valor medio $\langle \mathcal{H}_0 \rangle$ sullo stato $|\psi(t)\rangle$.
7. Si consideri ora il caso di due fermioni identici di spin 1/2. Determinare i valori ammissibili di l, l'energia e la degenerazione per lo stato fondamentale e i primi due livelli eccitati.
8. Si consideri il caso di due bosoni identici di spin 1. Determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato.
9. Si aggiunga a $\mathcal{H}_0$ un termine di interazione spin-orbita $V = \epsilon\alpha\vec{L}\cdot\vec{S}$, con $\epsilon \ll 1$. Calcolare lo spostamento dei livelli energetici dello stato fondamentale dei bosoni di spin 1 al primo ordine della teoria delle perturbazioni.
10. Calcolare gli autovalori esatti di $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$ e dimostrare che la loro espansione al primo ordine in ϵ coincide con i risultati ottenuti al punto precedente.
11. Si consideri il sistema di bosoni di spin 1 nel primo stato eccitato e si aggiunga ad $\mathcal{H}_0$ l'effetto di un campo magnetico debole lungo l'asse x, $H' = \beta J_x$, con $\beta \ll 1$. Determinare a quale ordine della teoria delle perturbazioni si osserva il primo spostamento non nullo dell'energia e motivare la risposta. Discutere se sia richiesto l'uso della teoria per livelli degeneri.