Esame di Fisica Quantistica

16 febbraio 2026

Si consideri un atomo idrogenoide con carica nucleare Z nel sistema del centro di massa.

1. Scrivere l'hamiltoniana H del sistema, i suoi autovalori e la relativa degenerazione.
2. Si consideri l'operatore parità Π. Determinarne l'azione sugli autostati $|nlm\rangle$ di H. Verificare se Π è una costante del moto.
3. Calcolare i commutatori $[H, L_z]$, $[H, L^2]$ e $[H, \vec{r} \cdot \vec{p}]$. Discutere il significato fisico dei risultati.
4. Dimostrare che per uno stato stazionario limitato di H vale la relazione tra i valori medi di energia cinetica T e potenziale V: $\langle T \rangle = k \langle V \rangle$ e determinare k.
5. Utilizzare il risultato precedente per calcolare $\langle 1/r \rangle$ per un generico autostato di H in funzione dell'energia.
6. Al tempo $t = 0$, il sistema si trova nello stato $|\psi(0)\rangle = (|100\rangle + |210\rangle)/\sqrt{2}$. Determinare lo stato al tempo t generico.
7. Calcolare la densità di probabilità al tempo t in termini di opportuni elementi di matrice e mostrare se è stazionaria.
8. Considerare il valore di aspettazione del momento di dipolo elettrico lungo l'asse z, $\langle d_z \rangle(t) = -e\langle \psi(t)|z|\psi(t)\rangle$, e calcolarne la frequenza di oscillazione.
9. Si vuole stimare l'energia dello stato fondamentale e si sceglie come funzione di prova:
$$\psi_\alpha(r) = (2\alpha/\pi)^{3/4} e^{-\alpha r^2}, \qquad (\alpha > 0).$$
Calcolare il valore di aspettazione di H su questo stato. Minimizzare $E(\alpha)$ rispetto al parametro α e confrontare il risultato ottenuto con il valore esatto.
10. Si consideri un sistema descritto dall'hamiltoniana H in cui il potenziale è modificato dal termine centrifugo aggiuntivo:
$$V' = \frac{\lambda}{r^2}, \qquad (\lambda > 0).$$
Calcolare in teoria delle perturbazioni la correzione al prim'ordine all'energia di un generico autostato di H. Mostrare se la perturbazione rimuove la degenerazione accidentale in l.
11. Risolvere il sistema descritto nel punto precedente in modo esatto con un'opportuna ridefinizione del numero quantico orbitale l. Determinare lo spettro e la degenerazione. Confrontare con il risultato perturbativo.

Formule utili:
$$\int_0^\infty |R_{nl}(r)|^2 dr = \frac{Z^2}{a_0^2 n^3 (l + 1/2)}.$$