

Esame di Fisica Quantistica

13 settembre 2024

La dinamica di una molecola biatomica in tre dimensioni è descritta dalla seguente hamiltoniana di un rotore rigido

$$H = \frac{|\vec{L}|^2}{2I} + \alpha L_z ,$$

dove I e α sono parametri reali. Si consideri lo stato del sistema al tempo $t = 0$, tale che:

$$|\vec{L}|^2 |\psi\rangle = 2\hbar |\psi\rangle ,$$

$$\frac{L_x + L_z}{\sqrt{2}} |\psi\rangle = \hbar |\psi\rangle .$$

- 1) Determinare lo spettro di autovalori e di autostati di H .
- 2) Per quali valori di α lo spettro è degenere?
- 3) Dimostrare che

$$(L_x + iL_y)|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|l, m+1\rangle,$$

$$(L_x - iL_y)|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}|l, m-1\rangle,$$

dove $|l, m\rangle$ sono gli autostati simultanei di $|\vec{L}|^2$ e L_z .

- 4) Quali valori può dare una misura di $|\vec{L}|^2$ sullo stato $|\psi\rangle$ e con che probabilità?
- 5) Determinare $|\psi\rangle$ in termini degli stati $|l, m\rangle$.
- 6) Quali valori può dare una misura di L_z sullo stato $|\psi\rangle$ e con che probabilità?
- 7) Determinare l'evoluzione dello stato $|\psi\rangle$ al tempo t in termini degli stati $|l, m\rangle$.
- 8) Calcolare i valori medi di L_x , L_y e L_z al tempo t , e determinare il tempo t per cui è massima la probabilità che una misura di L_x dia come risultato \hbar .
- 9) Si consideri ora la perturbazione $V = \lambda L_x$. Calcolare al prim'ordine in teoria delle perturbazioni la correzione agli autovalori e agli autostati di H .
- 10) Scrivere il termine $|\vec{L}|^2/(2I)$ in termini degli impulsi e delle masse dei singoli atomi, assumendo che la molecola ruoti attorno al proprio baricentro. Ricavare quindi I e $|\vec{L}|$ in termini delle masse degli atomi, della velocità angolare di rotazione della molecola e della distanza (fissa) fra gli atomi.