

Esame di Fisica Quantistica

7 luglio 2026

Si consideri una particella di massa m in uno spazio a N dimensioni, soggetta a un potenziale centrale $V(r)$, $r = |\vec{q}|$, invariante sotto il gruppo di rotazioni $O(N)$.

1. Calcolare gli elementi di matrice $\langle \vec{x} | p_i q_j - q_j p_i | \psi \rangle$, $\langle \vec{x} | q_i q_j - q_j q_i | \psi \rangle$, $\langle \vec{x} | p_i p_j - p_j p_i | \psi \rangle$, utilizzando l'azione degli operatori nella base delle coordinate, e da esse determinare i commutatori $[q_i, q_j]$, $[p_i, p_j]$, $[p_i, q_j]$.
2. Definendo il momento angolare generalizzato $L_{ij} = q_i p_j - q_j p_i$, mostrare che $L_{ij}^\dagger = L_{ij}$ e calcolare $[L_{ij}, L_{kl}]$.
3. Calcolare i commutatori $[L_{ij}, |\vec{p}|^2]$, $[L_{ij}, |\vec{q}|^2]$ e utilizzarli per mostrare che $[L_{ij}, H] = 0$. Cosa si può dire sullo spettro dell'hamiltoniana H ?
4. Quanti generatori indipendenti ha $O(N)$? Quanti se ne ritrovano per $N = 3$? Mostrare che per $N = 3$ i generatori L_{ij} si riducono alle usuali componenti del momento angolare.
5. Viene dato il laplaciano in N dimensioni in coordinate sferiche

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\Lambda^2}{r^2},$$

dove $\Lambda^2 = \frac{L_{ij} L_{ij}}{\hbar^2}$ è l'operatore di momento angolare generalizzato quadrato, con autovalori $l(l+N-2)$. Mostrare che l'equazione di Schrödinger si separa in una parte radiale e una angolare. Scrivere le equazioni per le due parti della funzione d'onda.

6. Definendo $u(r) = r^{(N-1)/2} R(r)$, imostrare la seguente identità:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \frac{d}{dr} \right) R(r) = r^{-\frac{N-1}{2}} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} \right) u(r).$$

7. Mostrare che, sfruttando i due punti precedenti, l'equazione della parte radiale si riscrive come un'equazione di Schrödinger unidimensionale con potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 \lambda(\lambda+1)}{2mr^2}, \quad \lambda = l + \frac{N-3}{2}.$$

8. Trattando V_{eff} classicamente e nel caso di N sufficientemente grande (cosiddetto limite di 't Hooft, corrispondente a una forte barriera centrifuga), mostrare che la configurazione che minimizza V_{eff} corrisponde a $l = 0$, con la particella localizzata a $r = r_0$. Scrivere l'equazione che determina r_0 .
9. Calcolare l'energia all'ordine dominante in $1/N$, $E_0 = V_{\text{eff}}(r_0)$, ed espandendo $V_{\text{eff}}(r)$ al primo ordine non nullo attorno a r_0 ricavare la correzione successiva, mostrando che è di tipo armonico. Scrivere gli autovalori di energia in questa approssimazione.
10. Applicare i punti precedenti al potenziale coulombiano $V(r) = -\alpha/r$, e confrontare il risultato con lo spettro esatto, noto in forma chiusa, $E_{n_r, l} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2(n_r + \lambda + 1)^2}$.
11. Nel caso coulombiano, si consideri lo stato fondamentale $l = 0$ in $N = 3$ dimensioni (cioè $\lambda = 0$). Mostrare che in questo caso $r_0 \rightarrow 0$ e che $E_0 = V_{\text{eff}}(r_0)$ diverge. Spiegare l'origine fisica di questo comportamento (si pensi al ruolo della barriera centrifuga nello stabilizzare il minimo di V_{eff}), e discutere che cosa implica per la validità dello sviluppo perturbativo in $1/N$ costruito nei punti precedenti.