Esame di Fisica Quantistica

7 febbraio 2024

Si consideri un oscillatore armonico isotropo di massa m e pulsazione ω in tre dimensioni.

1) Scrivere l'hamiltoniana del sistema prima in termini degli operatori impulso $\vec{p}$ e posizione $\vec{q}$ e poi in termini degli operatori

$$a_k = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(q_k + i\frac{p_i}{m\omega}\right) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

e dei loro hermitiani coniugati $a_k^\dagger$. Dimostrare l'equivalenza fra le due forme e calcolare i commutatori $[a_i, a_j]$ in termini del commutatore canonico.

2) Quali sono gli autovalori dell'hamiltoniana? Calcolare la loro degenerazione.

3) Calcolare la funzione d'onda dello stato fondamentale partendo dall'equazione

$$a_k|0\rangle = 0\,.$$

4) Calcolare la funzione d'onda del primo stato eccitato.

5) Dimostrare se gli operatori $a_k^\dagger$ ammettono autostati.

6) Calcolare l'evoluzione temporale degli operatori a_k e $a_k^\dagger$ e dimostrare che gli operatori $a_i^\dagger a_j$ sono costanti del moto.

7) Identificare le *osservabili* costanti del moto del sistema. Qual è la relazione con la degenerazione calcolata nel punto 3)?

8) Si consideri una trasformazione unitaria U, $q_k \to q_k' = Uq_kU^{-1} = \lambda p_k$, $p_k \to p_k' = Up_kU^{-1} = -q_k/\lambda$, con λ parametro reale, tale che $H \to H$. Determinare U e λ.

9) Sfruttare il risultato precedente per dimostrare che, in ogni autostato dell'hamiltoniana, il valor medio del termine cinetico è pari al valor medio del termine di potenziale e il valor medio dell'operatore $qp + qp$ è nullo.

10) Determinare se esiste una trasformazione unitaria U, $q_k \to q_k' = Uq_kU^{-1}$ $p_k \to p_k' = Up_kU^{-1}$, tale che $H \to H'$ dove H' è l'hamiltioniana di un oscillatore armonico isotropo di massa m' e pulsazione ω. Determinare esplicitamente U, q_k' e p_k'. Come cambiano gli autovalori e gli autostati di H' e perché?

11) Calcolare gli autovalori nel caso il sistema in questione descriva tre fermioni identici di spin 1/2 in una dimensione.