Esame di Fisica Quantistica

Non sono ammessi libri o appunti.

Proff. G. Ferrera, M. Zaro, 2 Febbraio 2026

Un sistema tridimensionale formato da due particelle distinguibili di massa m è descritto dalla seguente hamiltoniana

$$H = \frac{|\vec{p}_1|^2}{2m} + \frac{|\vec{p}_2|^2}{2m} + \frac{1}{4} m\omega^2 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 \tag{1}$$

dove $\vec{p}_i$ e $\vec{r}_i$ sono gli operatori (vettoriali) impulso e posizione per la particella i-esima.

1. Scomporre il problema in termini di hamiltoniana baricentrale H_B e relativa H_R.

2. Determinare lo spettro di H_R. È presente degenerazione? In caso affermativo, calcolarla.

3. Scrivere la più generale forma dello stato fondamentale e del primo stato eccitato, discutendo la dipendenza da eventuali parametri e il loro numero.

4. Calcolare i commutatori tra H_R e gli operatori

$$a_j = \sqrt{\frac{k}{2\hbar}} \left(x^{(j)} + i \frac{p^{(j)}}{k} \right) \tag{2}$$

   (scritti in termini di impulsi e coordinate relativi, con $j = x, y, z$). Utilizzare il risultato per determinare k affinchè gli operatori a_j agiscano come operatori di abbassamento per H_R, e ricavarne l'evoluzione temporale.

5. Sugli stati determinati al punto 3 viene misurato l'operatore $O = a_x^\dagger a_y + a_y^\dagger a_x$. Determinare i risultati possibili della misura, le probabilità di ciascuno e lo stato in cui il sistema si trova dopo la misura.

6. Mostrare che le componenti del momento angolare orbitale relativo possono essere scritte come $L_k = -i\hbar\epsilon^{ijk} a_i^\dagger a_j$

7. Dimostrare la seguente identità: $L^2 = \hbar^2 \left[N(N+1) - a_k^\dagger a_k^\dagger a_j a_j \right]$, dove $N = a_i^\dagger a_i$.

8. Utilizzare la relazione ricavata al punto precedente per mostrare che lo stato fondamentale e gli stati del primo livello eccitato sono autostati del momento angolare $\vec{L}^2$. A quale valore del numero quantico l sono associati?

9. Quanto affermato al punto precedente è vero anche per il secondo livello? Motivare la risposta e, in caso positivo, trovare il valore di l.

10. Se le due particelle hanno spin 1/2 e sono soggette a un'interazione tipo spin-orbita

$$H_{LS} = \alpha \vec{L} \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)\,, \tag{3}$$

   ($\vec{S}_i$ sono le componenti dello spin della i-esima particella), come vengono modificate l'energia e la degenerazione del primo stato eccitato di H_R?

11. Come cambia la risposta alla domanda precedente se le particelle sono indistinguibili?