Esercizi del corso di Fisica Quantistica (primo modulo)

Anno Accademico 2022-2023

Marco Zaro

Ultima modifica: 6 giugno 2023

1. Un sistema a due livelli mutualmente esclusivi rappresentati dagli stati $|+\rangle, |-\rangle$ è preparato nello stato
$$|\bar{\psi}\rangle = |+\rangle + 2|-\rangle \,. \tag{1}$$
   a) Assumendo la corretta normalizzazione di $|+\rangle, |-\rangle$, lo stato è normalizzato? In caso contrario, si scriva lo stato $|\psi\rangle$ con la normalizzazione corretta
   b) Quali sono le probabilità che una misura dia il risultato corrispondente a $|+\rangle$, $|-\rangle$?
   c) Si supponga ora che il sistema abbia tre livelli possibili corrispondenti agli stati $|+\rangle, |-\rangle, |\times\rangle$ (sempre mutualmente esclusivi e correttamente normalizzati), e sia preparato nello stato
$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\psi\rangle + i|\times\rangle\right) \,. \tag{2}$$
   Si calcoli la normalizzazione di $|\phi\rangle$, e le probabilità che una misura del sistema dia i tre stati. Dopo la misura, qual è lo stato del sistema?
   d) Si misura l'osservabile O che dice se il sistema è nello stato $|-\rangle$ o no. Si calcoli la probabilità che il sistema non venga rilevato in $|-\rangle$. In tal caso, dopo la misura qual è lo stato del sistema?

2. Si consideri lo stato $|\psi\rangle$ dell'esercizio precedente, punto a), e si consideri una misura dell'osservabile associata all'operatore (scritto nella base $|+\rangle, |-\rangle$)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \,. \tag{3}$$
   a) A è un buon operatore per un'osservabile fisica? Perché?
   b) Quali sono i risultati possibili della misura di A?
   c) Dopo una misura di A sullo stato $|\psi\rangle$, in che stato si trova il sistema? Con quale probabilità?
   d) Si supponga che una misura di A dia come risultato quello positivo tra i due possibili. Quali sono i risultati di una misura successiva A sul sistema?
   e) Scrivere A in notazione ket-bra nella base $|+\rangle, |-\rangle$

3. Si ripeta l'esercizio precedente per l'osservabile associata all'operatore
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,, \tag{4}$$

4. Si consideri sempre lo stato $|\psi\rangle$ degli esercizi precedenti. Si effettua una misura dell'osservabile associata ad A e successivamente ad essa una dell'osservabile associata a B. Nel primo caso si ottiene il risultato positivo, nel secondo quello negativo. Si misura successivamente A, quali sono i risultati possibili, e con quali probabilità? Si confronti con il punto d) dell' esercizio 2.

5. La rappresentazione dell'identità,
$$\mathbb{I} = \sum_i |i\rangle\langle i| \,, \tag{5}$$
non dipende dalla base. Mostrarlo per un sistema a due livelli confrontando i risultati ottenuti nelle basi degli autostati degli operatori A, B definiti nelle equazioni (3), (4), e nella base ortonormale in cui uno dei due stati è $|\psi\rangle$ definito nell'esercizio 1.
Opzionale: mostrarlo per una generica base ortonormale di un sistema a due livelli, scritta in termini degli stati $|\pm\rangle$.

6. Si calcolino e^A, e^B, con A, B definiti nelle equazioni (3), (4).
Suggerimento: Per il calcolo di funzioni di operatori, si utilizzi la corrispondente espansione in serie di Taylor. Eventualmente, riorganizzare la serie in modo da sfruttare determinate proprietà ricorsive delle potenze degli operatori dati.

7. Dati i seguenti operatori, scrivere in notazione ket-bra e matriciale nella base $|+\rangle, |-\rangle, |\times\rangle$ quelli che sono autoaggiunti:
   a) L'operatore autoaggiunto H che assegna 0 a $|\times\rangle$, 1 a $|\psi\rangle$ (definito nell'Es. 1) e -1 altrimenti
   b) L'operatore K i cui autostati sono $|\phi\rangle$ (definito nell'Es. 1), $|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi\rangle - i|\times\rangle)$, a $|+\rangle$, con autovalori rispettivamente 0, 1 e -1.
   c) L'operatore L che assegna 0 a $|\phi\rangle$ (definito nell'Es. 1), 1 a $|\xi\rangle$, -1 a $|\zeta\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|+\rangle - |-\rangle)$.
   d) L'operatore Π che assegna 1 a $|\times\rangle$ e zero altrimenti. Quali sono i suoi autostati?
   e) L'operatore O dell'Es. 1 (supponendo che restituisca 0 quando il sistema si trova in $|-\rangle$ e 1 altrimenti).

8. a) Dato un operatore generico, lo si scriva come somma di una parte Hermitiana e di una parte anti-Hermitiana
   b) Il prodotto di due operatori Hermitiani è in generale Hermitiano? Se la risposta è no, sotto quali condizioni lo può essere?

9. Dato l'operatore Π definito al punto d) dell Es. 7, mostrare che Π è un proiettore. Tra gli operatori H, L, O ne esistono altri che siano proiettori?

10. Dato un qualsiasi operatore H autoaggiunto, e definito $H' = AHA^{-1}$, allora:
    a) Dimostrare che se H' è autoaggiunto allora $A^\dagger A = k\mathbb{I}$, con $k \in \mathbb{R}$.
    Suggerimento: se $A^\dagger A$ commuta con H, allora deve essere proporzionale all'identità. Calcolarne l'aggiunto per mostrare che la costante di proporzionalità è reale.
    b) Dimostrare la condizione inversa: se vale che $A^\dagger A = k\mathbb{I}$ con $k \in \mathbb{R}$, allora H' è autoaggiunto.

11. Costruire le matrici di trasformazione dalla base in cui l'operatore A è diagonale a quella in cui B è diagonale, e viceversa (gli operatori A, B sono definiti nelle equazioni (3), (4)).

12. Costruire le matrici di trasformazione dalla base $|+\rangle, |-\rangle, |\times\rangle$ alle basi degli autostati degli operatori H, K, L definiti nell'esercizio 7. Possiamo dire a priori (cioè prima di calcolarne gli elementi) quali tra queste matrici sono unitarie? Verificare la risposta con il calcolo esplicito.

13. a) Dimostrare che se H è un operatore Hermitiano, allora $U = \exp(iH)$ è unitario.

    b) Dimosrare la condizione inversa: se $U = \exp(iH)$ è un operatore unitario, allora H è Hermitiano. Si scriva $H = \gamma\tilde{H}$, con $\gamma \in \mathbb{R}$ e si consideri inizialmente il limite $\gamma \to 0$. In questo limite si mostri che $\tilde{H}$ è Hermitiano (questo cosa implica per H?).

    c) Successivamente si completi la dimostrazione per γ arbitrari.
    Suggerimento: utilizzare la definizione di operatore unitario e derivarla rispetto a γ.

14. Dati tre operatori A, B, C, mostrare l'identità di Jacobi per il commutatore, tramite calcolo esplicito:

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0\,. \tag{6}$$

15. Dati due operatori A, B, tali che $[B,[A,B]] = 0$, mostrare che

$$[A, f(B)] = [A,B]\,\frac{df(B)}{dB}\,. \tag{7}$$

    Suggerimento: Considerare prima il caso particolare $f(B) = B^n$, dopodichè estendere al caso più generale.

16. Dati due operatori A, B:

    a) Determinare sotto quali condizione vale la relazione $e^A e^B = e^{A+B}$.

    b) Assumendo che $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$, mostrare che $e^B A e^{-B} = A + [B,A]$.
    Suggerimento: Utilizzare il risultato dell'esercizio precedente. In alternativa, considerare $F(t) = e^{Bt} A e^{-Bt}$, derivare rispetto a t e risolvere l'equazione differenziale.

    c) Facendo le stesse assunzioni del punto precedente, mostrare l'identità di Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^A e^B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A,B]\right)\,. \tag{8}$$

    Suggerimento: Considerare $G(t) = e^{At}e^{Bt}$, calcolare $\frac{d\log(G(t))}{dt}$ e risolvere l'equazione differenziale utilizazndo il risultato del punto precedente.

17. Date le possibili coppie tra gli operatori H, L, O, Π definiti nell'esercizio 7, calcolarne i commutatori. Nel caso di operatori commutanti, scrivere una base comune di autostati.

18. Sono dati gli operatori P, Q le cui espressioni matriciali, nella base $|+\rangle, |-\rangle, |\times\rangle$, sono

$$P = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iq \\ 0 & iq & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

    con $p, q \in \mathbb{R}$.

    a) Gli operatori presentano degenerazione?

    b) Gli operatori sono compatibili? In caso positivo, trovare una base ortonormale di ket che siano autostati simultaneamente di P e Q. La conoscenza degli autovalori dei due operatori è sufficiente a determinare univocamente lo stato?

19. Mostrare la seguente identità per la δ di Dirac:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}\,, \tag{10}$$

dove x_i sono gli zeri di $f(x)$, $f(x_i) = 0$ (ma $f'(x_i) \neq 0$).

20. Calcolare i seguenti integrali

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ay^2 - 1) f(y) dy\,, \tag{11}$$
$$I_2 = \int_{0}^{+\infty} \delta(ay^2 - 1) f(y) dy\,, \tag{12}$$
$$\tag{13}$$

dove a è una costante reale.

21. Definiamo l'operatore $\mathcal{P}$, la cui azione sugli autostati di posizione è

$$\mathcal{P}|x\rangle = |-x\rangle\,. \tag{14}$$

a) Determinare le autofunzioni e gli autovalori di $\mathcal{P}$.

b) Verificare che $\mathcal{P}$ è Hermitiano e unitario. Verificare inoltre l'ortogonalità di autofunzioni associate a autovalori distinti.

c) Come trasformano gli operatori posizione e impulso sotto l'azione di $\mathcal{P}$? Determinare $\mathcal{P}\hat{x}\mathcal{P}^{-1}$ e $\mathcal{P}\hat{p}\mathcal{P}^{-1}$.

d) Se T_δ è l'operatore di tralsazione, $T_\delta|x\rangle = |x - \delta\rangle$, determinare il commutatore $[\mathcal{P}, T_\delta]$, valutandone l'azione sugli autostati di posizione.

22. Calcolare:

a) $[\hat{x}, \hat{p}^2]$;

b) $[\hat{x}^2, \hat{p}]$;

c) $[\hat{x}^2, \hat{p}^2]$;

d) $e^{i\frac{\hat{p}}{\hbar}a}\hat{x}e^{-i\frac{\hat{p}}{\hbar}a}$ e commentare il risultato.
Suggerimento: Si possono utilizzare risultati ottenuti negli Es. 15 o 16.

23. Considerare una dilatazione, ossia la trasformazione unitaria D che mappa $x \to \lambda x$.

a) Come agisce D sugli autostati della posizione? E su uno stato $|\psi\rangle$ generico?
Suggerimento: Attenzione alla normalizzazione degli stati quando si applica la trasformazione.

b) Qual è il generatore della trasformazione? Verificare che è Hermitiano.
Suggerimento: Considerare una trasformazione infinitesima.

c) Come trasformano posizione e impulso? Determinare $\hat{x}' = D\hat{x}D^{-1}$ e $\hat{p}' = D\hat{p}D^{-1}$.

d) Mostrare che x', p' soddisfano le regole di commutazione canoniche.

e) Che relazione c'è tra D e l'operatore $\mathcal{P}$ defninito nell'Es. 21?

24. È dato uno stato $|\psi\rangle$ che ha la seguente funzione d'onda nella base delle coordinate:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2a}} & \text{se } |x| < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} , \tag{15}$$

dove a è un parametro reale positivo.

a) Mostrare che $\psi(x)$ è correttamente normalizzata.

b) Calcolare la funzione d'onda nella base degli impulsi. Che significato ha il parametro a?

c) Calcolare il valore medio di $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{x}^2$, $\hat{p}^2$ e iverificare che il principio di indeterminazione tra posizione e impulso è soddisfatto.
Suggerimento: Quale base è più pratica nei vari casi? Un valore medio è infinito.

25. Sono date due funzioni d'onda $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, correttamente normalizzate e tali che

$$\psi_0(-x) = \psi_0(x) = \psi_0^*(x) , \qquad \psi_1(x) = N\frac{d\psi_0}{dx}, \tag{16}$$

e la loro combinazione lineare $\psi(x) = a_0\psi_0(x) + a_1\psi_1(x)$, con $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$ (assumere N come noto e reale).

a) Mostrare che $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ sono ortogonali tra loro. Mostrare quindi che $\psi(x)$ è correttamente normalizzata.

b) Calcolare i valori medi di $\hat{x}$ e $\hat{p}$ negli stati ψ_0, ψ_1, ψ.

c) Considerare l'energia cinetica $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ (la massa m è un parametro reale). Mostrare che

$$\langle\psi_0|\hat{T}^2|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|\hat{T}|\psi_0\rangle\langle\psi_1|\hat{T}|\psi_1\rangle . \tag{17}$$

d) Mostrare che

$$\langle\psi_0|\hat{T}|\psi_0\rangle \leq \langle\psi|\hat{T}|\psi\rangle \leq \langle\psi_1|\hat{T}|\psi_1\rangle . \tag{18}$$

Suggerimento: Considerare la disuguaglialnza di Schwartz per il prodotto scalare $\langle\psi_2|\psi_0\rangle$, con $\psi_2(x) = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{d}{dx}\right)^2\psi_0(x)$, e utilizzare il risultato del punto precendente.

26. Considerare un sistema a due livelli, in cui l'Hamiltoniana sia

$$H = E_0 B , \tag{19}$$

dove B è definito nell'Eq. (4). Al tempo $t = 0$ il sistema è preparato nello stato $|+\rangle$ (l'autostato di A, Eq. (3), con autovalore positivo).

a) Determinare l'operatore di evoluzione temporale, e utilizzarlo per ottenere lo stato del sistema a un generico tempo t.
Suggerimento: Si veda quanto fatto nell'Es. 6.

b) Ripetere il calcolo decomponendo lo stato di partenza sugli autostati dell'Hamiltoniana, considerando l'evoluzione temporale di questi ultimi.

c) Quali sono le probabilità al tempo t di ottenere gli autovalori ± 1 in una misura di A?

d) Utilizzare il risultato dei punti precedenti per determinare valore medio e indeterminazione di A e B a un tempo t generico.

e) Esiste un tempo t' al quale il sistema si trova in un'autostato dell'operatore B? Se sì, determinarlo. Altrimenti, spiegare perchè non esiste.

27. Si consideri il sistema dell'esercizio precedente. Calcolare il valore medio di A in rappresentazione di Heisemberg nello stato $|+\rangle$. Si suggerisce di seguire i seguenti punti:

a) Mostrare che, in generale, dati due operatori P, Q, allora $[P_H, Q_H] = [P, Q]_H$ (dove il pedice $_H$ indica che gli operatori sono in rappresentazione di Heisenberg).

b) Posto

$$C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

Mostrare che

$$[A, B] = -2iC \tag{21}$$

$$[C, B] = 2iA \tag{22}$$

c) Scrivere l'equazione di dipendenza temporale in rappresentazione di Heisenberg per gli operatori A e C.

d) Derivando rispetto al tempo entrambi i membri dell'equazione di dipendenza temporale per A, ottenere la soluzione per $A_H(t)$.
Suggerimento: Attenzione alle costanti di integrazione!

e) Confrontare il risultato ottenuto per A_H con quello che si otterrebbe utilizzando l'operatore di evoluzione temporale calcolato all'esercizio precedente.

f) Infine, calcolare il valore medio nello stato dato.

28. Sono dati tre operatori Hermitiani A, B, H, tali che $[A, B] \neq 0$ e $[A, H] = [B, H] = 0$. Si mostri che lo spettro di H è degenere.

29. Considerare un sistema a con due livelli energetici distinti, $E_1 \neq E_2$. Le due autofunzioni associate, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, sono nulle al di fuori, rispettivamente, delle regioni Ω_1, Ω_2.

a) Nel caso in cui non ci sia sovrapposizione tra le due regioni, si dimostri che se la particella si trova inizialmente in Ω_1 ci resterà per sempre.

b) Sempre nel caso senza sovrapposizione, mostrare che a una funzione d'onda arbitraria

$$\psi(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x), \tag{23}$$

corrisponde una densità di probabilità indipendente dal tempo.

c) Assumendo invece che ci sia sovrapposizione tra le due regioni, mostrare che la densità di probabilità è una funzione periodica nel tempo.

30. È data la seguente funzione d'onda per una particella libera al tempo iniziale

$$\psi(x, 0) = \sqrt{\alpha}e^{-\alpha|x|}e^{ikx}, \tag{24}$$

dove α è una costante reale e positiva

a) Verificare la corretta normalizzazione dello stato.

b) Calcolare i valori medi di posizione e impulso al tempo iniziale e a ogni tempo t.
Suggerimento: Utilizzare la rappresentazione più pratica dell'evoluzione temporale.

c) Calcolare le indeterminazioni di posizione e impulso al tempo iniziale, e verificare che il principio di indeterminazione viene soddisfatto.
Suggerimento: Per il calcolo di $\langle\psi|p^2|\psi\rangle$, *dimostrare che* $\langle\psi|p^2|\psi\rangle = \|p|\psi\rangle\|^2$.

31. Una particella libera ha funzione d'onda corrispondente a un pacchetto Gaussiano la cui espressione, al tempo $t = 0$, è data da

$$\psi(x,0) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\alpha}{2}x^2 + ik_0 x\right] , \tag{25}$$

dove $\alpha > 0$.

a) Cosa succede nel limite $\alpha \to \infty$?

b) Ottenere la funzione d'onda nello spazio delle posizioni a ogni tempo t e la densità di probabilità.

c) Cosa succede, per t finiti, se $\alpha \to \infty$? Commentare il risultato.

32. È data la seguente funzione d'onda per una particella libera

$$\psi(x,0) = N\left(e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2} + e^{-\frac{\alpha}{2}(x+x_0)^2}\right) , \tag{26}$$

dove $\alpha > 0$. Si assuma nota la normalizzazione N.

a) Si tratta di uno stato di minima indeterminazione?

b) Scrivere la funzione d'onda evoluta a tempi arbitrari.

c) Calcolare la densità di probabilità a tempi arbitrari. Come si interpretano i vari termini che la compongono?

33. In un sistema in cui è presente un potenziale lineare

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa x , \tag{27}$$

con $\kappa \in \mathbb{R}$, lo stato iniziale è dato dalla segunete funzione d'onda

$$\psi(x,0) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\alpha}{2}x^2 + ik_0 x\right] \tag{28}$$

Determinare i valori medi di posizione e impulso a ogni tempo t e verificare che soddisfano le equazioni classiche del moto.
Suggerimento: Utilizzare la rappresentazione più conveniente dell'evoluzione temporale.

34. Considerare l'equazione di Schrödinger per un potenziale generico, e studiare l'effetto dell'*inversione temporale* ($t \to -t$) su di essa. In particolare:

a) Mostrare che se $\psi(x,t)$ è una soluzione, allora anche $\tilde{\psi}(x,t) = \psi(x,-t)^*$ lo è.

b) Calcolare i valori medi di posizione e impulso nello stato $\tilde{\psi}(x,t)$, confrontandoli con quelli in $\psi(x,t)$.

c) Confrontare le due funzioni nella base degli impulsi.

d) Definendo l'operatore di inversione temporale Θ tale che $\Theta|\psi(t)\rangle = |\tilde{\psi}(t)\rangle$, verificare che conserva la norma di uno stato ma, in generale, manda il prodotto scalare tra due stati nel suo complesso coniugato (è detto anti-unitario).

e) Usando il risultato del punto b), come trasformano sotto Θ gli operatori x e p, e i loro ket di base?

f) Mostrare che Θ è antilineare:

$$\Theta\left[a|\psi_1(t)\rangle + b|\psi_2(t)\rangle\right] = a^*|\psi_1(-t)\rangle + b^*|\psi_2(-t)\rangle \,. \tag{29}$$

35. È data la seguente Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \alpha\delta(x)\,. \tag{30}$$

a) Integrando in un intorno dell'origine, derivare le condizioni di raccordo per la derivata della funzione d'onda.

b) Calcolare i coefficienti di riflessione e trasmissione per gli stati di scattering (sia per $\alpha > 0$ che per $\alpha < 0$).

c) Nel caso $\alpha < 0$ esistono stati legati? In caso affermativo, trovare i livelli di energia permessi.

36. Si consideri il problema di una buca infinita di potenziale:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < a\,, \\ +\infty & \text{altrimenti}\,. \end{cases} \tag{31}$$

a) Calcolare i valori medi di posizione e impulso, al tempo iniziale e a ogni tempo, per lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right)\,, \tag{32}$$

dove con $|i\rangle$ si intende lo stato associato al livello i-esimo della buca.

b) Mostrare che sono nulli gli elementi di matrice di posizione e impulso tra due stati corrispondenti a livelli energetici entrambi pari o entrambi dispari.

37. Determinare gli autovalori di energia e le autofunzioni per una buca infinita avente inizio nell'origine e larghezza l, ovvero in cui il potenziale sia dato dalla forma

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < l\,, \\ +\infty & \text{altrimenti}\,. \end{cases} \tag{33}$$

Che relazione c'è con il caso di buca infinita simmetrica?

38. Si consideri il caso di un potenziale lineare, come all'Es. 33.

a) Risolvere l'equazione agli autovalori dell'Hamiltoniana nello spazio degli impulsi. C'è degenerazione?

b) Ricondurre l'equazione agli autovalori dell'Hamiltoniana nello spazio delle posizioni all'equazione differenziale di Airy:

$$f''(z) - zf(z) = 0\,. \tag{34}$$

In termini di una riparametrizzazione della posizione $z(x)$.

c) Le due soluzioni all'equazione di Airy sono le funzioni $\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Bi}(z)$, dette funzioni di Airy. Esse sono oscillanti per $z < 0$, e monotone per $z > 0$, e hanno un punto di flesso per $z = 0$.
Il loro comportamento per $z \to +\infty$ è

$$\mathrm{Ai}(z) \sim \exp\left(-\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right), \qquad \mathrm{Bi}(z) \sim \exp\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right). \tag{35}$$

Scrivere gli autostati dell'Hamiltoniana nello spazio delle posizioni in termini delle funzioni di Airy (assumere nota la normalizzazione).

d) Discutere, in termini delle funzioni di Airy (assumendo siano note le posizioni degli zeri e dei punti stazionari), la forma degli stati legati e gli autovalori dell'energia nei seguenti casi:

   i) Buca triangolare simmetrica,

$$V(x) = \kappa |x| . \tag{36}$$

   ii) Buca triangolare asimmetrica ("palla che rimbalza"),

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x < 0 , \\ \kappa x & \text{se } x > 0 . \end{cases} \tag{37}$$

39. Si consideri l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 . \tag{38}$$

Senza utilizzare la forma esplicita delle funzioni d'onda degli autostati di H, rispondere alle seguneti domande:

a) Per quale combinazione lineare (normalizzata) degli stati $|0\rangle, |1\rangle$ il valore medio di x è massimo? In questo stato, quanto vale il valore medio di p?

b) Si valuti il valore medio di x a un generico tempo t usando sia la rappresentazione di Schrödinger che quella di Heisenberg.

c) Sempre utilizzando entrambe le rappresentazioni dell'evoluzione temporale, si valuti la varianza Δx^2 a ogni tempo t.

40. Si consideri l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico (Eq. 38), e l'operatore parità $\mathcal{P}$ definito all'Es. 21.

a) Come trasforma H sotto parità? Cosa possiamo dedurre sulle sue autofunzioni?

b) Come trasformano gli operatori $a, a^\dagger$ sotto parità?

c) Utilizzare i risultati precedenti per dimostrare che le autofunzioni dell'Hamiltoniana di un oscillatore armonico sono di parità alternata, cioè

$$\mathcal{P}|n\rangle = \lambda_0 (-1)^n |n\rangle , \tag{39}$$

dove λ_0 è la parità dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico.

d) Mostrare che l'operatore parità può essere rappresentato come

$$\mathcal{P} = \exp(i\pi N) , \tag{40}$$

dove $N = a^\dagger a$, calcolando esplicitamente l'elemento di matrice

$$\langle x| \exp(i\pi N) |\psi\rangle \tag{41}$$

per uno stato $|\psi\rangle$ generico.

41. Considerare un oscillatore armonico con l'Hamiltoniana in Eq. 38. Senza utilizzare gli operatori di creazione e distruzione, rispondere ai seguenti punti:

   a) Dimostrare l'identità
   $$[H,[H,x^2]] = 4\hbar^2\omega^2 x^2 - \frac{4\hbar^2}{m}H\,. \tag{42}$$

   b) Mostrare che, di conseguenza, gli elementi di matrice $\langle m|x^2|n\rangle$ sono non nulli a meno che $m = n \pm 2$ oppure $m = n$.

   c) Noti gli elementi di matrice
   $$\begin{aligned} \langle m|x|n\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}\,\delta_{m,n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1}\right)\,, \\ \langle m|x^2|n\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{n(n-1)}\,\delta_{m,n-2} + \sqrt{(n+1)(n+2)}\,\delta_{m,n+2} + (2n+1)\delta_{m,n}\right)\,, \end{aligned} \tag{43}$$
   mostrare che vale la relazione di completezza
   $$\langle m|x^2|n\rangle = \sum_l \langle m|x|l\rangle\langle l|x|n\rangle\,. \tag{44}$$

42. Una particella di massa m è soggetta a un potenziale armonico (unidimensionale) e a un campo elettrostatico omogeneo
   $$\bar{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - q\mathcal{E}x \equiv H - q\mathcal{E}x\,. \tag{45}$$

   a) Trovare autovalori e autofunzioni di $\bar{H}$, in termini di quelli di H.

   b) Scrivere l'operatore traslazione
   $$T(l) = \exp\left(i\frac{pl}{\hbar}\right)\,, \tag{46}$$
   in termini degli operatori creazione e distruzione relativi a H, utilizzando la formula di Baker-Campbell-Hausdorff dimostrata all'Es. 16 (e giustificandone l'utilizzo).

   c) Se, al tempo iniziale ($t = 0$) il sistema è nello stato fondamentale dell'Hamiltoniana H, qual è la probabilità che venga rivelato nello stato fondamentale di $\bar{H}$?

   d) Quanto vale $a|\bar{0}\rangle$, dove a è l'operatore distruzione per l'Hamiltoniana H e $|\bar{0}\rangle$ è lo stato fondamentale di $\bar{H}$?

43. Considerando un oscillatore armonico unidimensionale, calcolare, in rappresentazione di Heisenberg, gli operatori $x_H(t)$ e $p_H(t)$ utilizzando la loro definizione in termini dell'operatore di evoluzione temporale $S(t,0) = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}$:
   $$x_H(t) = S(t,0)^\dagger x_S S(t,0)\,, \qquad p_H(t) = S(t,0)^\dagger p_S S(t,0)\,. \tag{47}$$
   A tal fine, si suggeriscono i seguenti passaggi:

   a) Dimostrare la relazione
   $$e^{-A}Be^{A} = B + [B,A] + \frac{1}{2}[[B,A],A] + \frac{1}{n!}\underbrace{[[B,A],A]\ldots],A]}_{n\ \text{commutatori}} + \ldots\,. \tag{48}$$
   Nel nostro caso (ma senza perdita di generalità), porre $A = H\tilde{t}$, con $\tilde{t} = -i\frac{t}{\hbar}$, e scrivere $e^{-A}Be^{A}$ come serie di Taylor centrata in $\tilde{t} = 0$.

b) Osservare che i commutatori multipli pari o dispari di x_S con H sono proporzionali a x_S o p_S rispettivamente, e riorganizzare la serie di Taylor (analogamente per i commutatori pari o dispari di p_S con H).

c) Confrontare con il risultato classico.

44. Il polinomio di Hermite di grado n è dato da

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \left(\frac{d}{dz}\right)^n e^{-z^2} . \tag{49}$$

Dimostrare (per induzione) che le funzioni

$$\psi_n(x) = N_0 \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}} H_n(z)\, e^{-z^2/2} \tag{50}$$

sono autofunzioni normalizzate relative all'autovalore $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ dell'Hamiltoniana di oscillatore armonico, Eq. 38. Si sottointende che z è un riscalamento della posizione

$$z = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x , \tag{51}$$

e N_0 è tale che ψ_0 è normalizzata.

45. Un sistema a due livelli è caratterizzato dalla seguente matrice densità

$$\rho = p_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + p_2 |\psi_2\rangle\langle\psi_2| , \tag{52}$$

Dove gli stati $|\psi_{1,2}\rangle$ sono generici (non si può assumere che siano ortogonali).

a) Si scriva ρ in forma matriciale in una base ortonormale che contiene $|\psi_1\rangle$.

b) Sotto quali condizioni ρ è una buona matrice densità? Si tratta di uno stato puro o misto?

c) Mostrare che, nei casi di cui al punto b), $\det(\rho) \leq \frac{1}{4}$.

d) Mostrare che ρ può essere scritta in maniera unica in termini di due stati ortonormali.

46. Un sistema a due livelli $|+\rangle$, $|-\rangle$ è governato dall'Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(H_0 \mathbb{I} + \vec{H} \cdot \vec{\sigma}\right) , \tag{53}$$

dove $H_0 \in \mathbb{R}$, $\vec{H}$ è un vettore di numeri reali e $\vec{\sigma}$ sono le matrici di Pauli.

a) Mostrare che la dipendenza temporale della matrice densità è data dall'equazione

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \rho] \tag{54}$$

b) Mostrare che, se la matrice densità è scritta come

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \vec{\Psi} \cdot \vec{\sigma}\right) , \tag{55}$$

($\vec{\Psi}$ è un vettore di numeri reali) la dipendenza temporale ottenuta al punto a) equivale all'equazione

$$\frac{d\vec{\Psi}}{dt} = -\frac{1}{\hbar}\vec{H} \times \vec{\Psi} . \tag{56}$$

Il simbolo $\times$ indica il prodotto vettoriale che, in componenti, è dato da

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_k = \epsilon_{ijk}\, a_i\, b_j \,. \tag{57}$$

Suggerimento: Ricordare che il commutatore di due matrici di Pauli è $[\sigma_i, \sigma_j] = -2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$.

c) Decomponendo $\vec{\Psi}$ nelle componenti parallela e ortogonale a $\vec{H}$, mostrare che la prima è costante del moto, e la seconda soddisfa l'equazione

$$\frac{d^2\vec{\Psi}_\perp}{dt^2} = -\frac{\vec{H}^2}{\hbar^2}\vec{\Psi}_\perp \,. \tag{58}$$

Suggerimento: Può essere utile l'identità: $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$.

d) Calcolando determinante e traccia di $\mathcal{H}$, mostrare che $\vec{H}^2 = (E_1 - E_2)^2$ dove $E_{1,2}$ sono gli autovalori dell'Hamiltoniana $\mathcal{H}$.

e) Risolvere l'equazione differenziale per $\vec{\Psi}_\perp$ e mostrare che la direzione di $\vec{\Psi}_\perp$ ruota (precede) nel piano ortogonale a $\vec{H}$.

47. Gli stati coerenti di un oscillatore armonico sono definiti come gli autostati dell'operatore distruzione

$$a|z\rangle = z|z\rangle \,. \tag{59}$$

Calcolare valore medio e varianza dell'operatore numero in questi stati, e mostrare che il rapporto $\frac{\langle \Delta N \rangle}{\langle N \rangle} \to 0$ per $\langle N \rangle$ grande. Mostrare inoltre che tali quantità non dipendono dal tempo.

48. Mostrare che l'operatore parità agisce sugli stati coerenti nel seguente modo:

$$\mathcal{P}|z\rangle = |-z\rangle \,. \tag{60}$$

Inoltre, dati due stati coerenti $|\pm z\rangle$, costruire le combinazioni lineari corrispondenti agli autostati di parità. Infine, decomporre queste combinazioni lineari sugli autostati dell'energia dell'oscillatore armonico e commentare il risultato (anche alla luce dell'Es. 40).