

Elettromagnetismo: problemi

Prof. Marco Zaro
(basato sugli esercizi del Prof. X. Roca Maza)

2023-2024

9 Onde elettromagnetiche

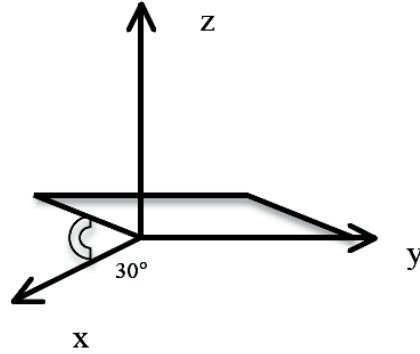
9.1 Un'onda elettromagnetica piana si propaga lungo x in un mezzo con $\epsilon_r = 1.5$. Il campo magnetico dell'onda è dato dalla relazione: $B_y = B_0 \cos(8 \times 10^8 t - 4x)$, con $B_0 = 1.8 \times 10^{-6}$ T e x e t espressi, rispettivamente, in m e s. Determinare:

- i valori di frequenza e lunghezza d'onda della radiazione, nonché la sua velocità di propagazione e il valore della permeabilità magnetica del mezzo;
- l'equazione del campo elettrico in funzione di x e t , e il valore della sua ampiezza;
- la potenza che incide su di una superficie piana di area $A = 2.3 \text{ m}^2$, perpendicolare al piano xz e che forma un angolo di $\theta = 30$ gradi col piano xy . Si calcoli anche la pressione di radiazione sulla stessa superficie, supponendola perfettamente riflettente.

Soluzione a): $f = 1.27 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$, $\lambda = 1.57 \text{ m}$, $v = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$ e $\mu_r = 1.5$

Soluzione b): $\vec{E} = -vB_0 \cos(\omega t - kx)\hat{k}$

Soluzione c): $P = \frac{1}{2} \frac{vB_0^2}{\mu} \sin \theta A = 198 \text{ W}$ e $p = \frac{B_0^2}{\mu} \sin \theta = 8.6 \times 10^{-7} \text{ N/m}^2$



9.2 Il campo di induzione magnetica di un'onda piana, che propaga in un dielettrico caratterizzato da ϵ_r e μ_r , con lunghezza d'onda λ , ha la seguente espressione:

$\vec{B}(y, t) = B_0 [\cos(ky - \omega t)\hat{i} - \sin(ky - \omega t)\hat{k}]$ con B_0 costante e uniforme

Determinare: a) la frequenza, il tipo di polarizzazione dell'onda e l'espressione del campo elettrico; b) la quantità media di energia elettromagnetica che è contenuta nel volume (parallelepipedo di sezione A perpendicolare all'asse y e altezza h) e quella che l'onda trasporta attraverso la base A in un tempo Δt ; e c) la forza esercitata dall'onda sulla base A nell'ipotesi che essa sia totalmente assorbente.

Soluzione a): $f = \frac{c}{\lambda\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$, polarizzazione circolare,

e $\vec{E} = \frac{cB_0}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} [\sin(ky - \omega t)\hat{i} + \cos(ky - \omega t)\hat{k}]$

Soluzione b): $\langle W_{\text{vol}} \rangle = \langle u \rangle V = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu} Ah$ e $\langle W_{\text{sup}}(\Delta t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu} \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} A\Delta t$

Soluzione c): $F = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu} A$

9.3 Il campo elettrico di un'onda piana, di frequenza f , che propaga in un dielettrico trasparente caratterizzato da ϵ_r e μ_r , ha la seguente espressione:

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \left[\sin(kx - \omega t)\hat{j} - \cos(kx - \omega t)\hat{k} \right]$$

Determinare: a) il vettore d'onda k e le espressioni del campo $\vec{B}(x, t)$ e del vettore di Poynting $\vec{S}(x, t)$; b) il valore di E_0 sapendo che nell'intervallo di tempo Δt , su una superficie di area A giacente nel piano $x = 0$ incide una quantità di energia W ; e c) la forza esercitata sulla superficie del punto b) supponendo che la stessa sia totalmente assorbente.

Soluzione a): $k = 2\pi f \frac{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}{c}$

$$\vec{B}(x, t) = \frac{E_0}{v} \left[\cos(kx - \omega t)\hat{j} + \sin(kx - \omega t)\hat{k} \right]$$

$$\vec{S}(x, t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \hat{i}$$

Soluzione b): $E_0 = \left[\frac{\mu}{\epsilon} \frac{W^2}{A^2 \Delta t^2} \right]^{1/4}$

Soluzione c): $F = \sqrt{\epsilon \mu} \frac{W}{\Delta t}$

9.4 Un'onda elettromagnetica propaga nella direzione positiva dell'asse x , e il campo elettrico associato ha l'espressione:

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{j} + E_0 \sin(kx - \omega t)\hat{k},$$

e il valore della pulsazione è ν . La propagazione dell'onda avviene in un mezzo assimilabile al vuoto. Determinare: a) i valori di k e λ , nonché l'espressione analitica del campo B in funzione di x e t ; b) sapendo che una misura dell'intensità media della radiazione sul piano $x = 0$ fornisce il valore I , si determinino i valori del modulo dei campi E e di B ; e c) una sbarretta di metallo è disposta lungo la bisettrice del piano yz , ovvero ha come estremi $(y_A, z_A) = (0, 0)$ e $(y_B, z_B) = (l, l)$. Si calcoli l'espressione della differenza di potenziale $V_A - V_B$ in funzione del tempo e il suo valore massimo.

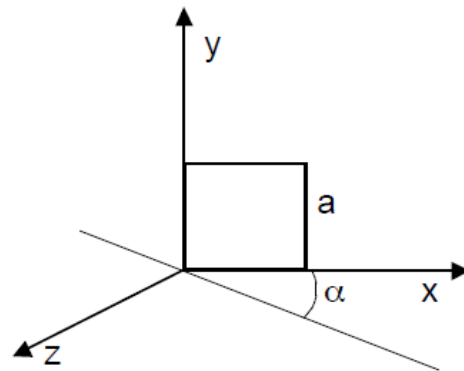
Soluzione a): $k = \frac{2\pi\nu}{c}$ e $\lambda = \frac{c}{\nu}$

$$\vec{B}(x, t) = -\frac{E_0}{v} \sin(kx - \omega t)\hat{j} + \frac{E_0}{v} \cos(kx - \omega t)\hat{k},$$

Soluzione b): $E_0 = \left(\frac{2I}{\epsilon_0 c} \right)^{1/2}$ e $B_0 = \left(\frac{2\mu_0 I}{c} \right)^{1/2}$

Soluzione c): $V_A - V_B = -E_0 l \sin(\omega t - \pi/4)$ e il suo valore massimo sarà per valori del $\sin(\omega t - \pi/4) = \pm 1$ e quindi $\omega t = -\pi/4, 3\pi/4 \dots$ e $V_A - V_B|_{\max} = \pm E_0 l$.

9.5 Un'onda piana di frequenza ν propaga in un mezzo dielettrico, caratterizzato da $\epsilon_r \mu_r$, nel verso positivo dell'asse y . L'onda è polarizzata linearmente lungo una direzione che forma un angolo $\alpha = 30$ rispetto all'asse x e ha intensità (media) I . Assumendo



che in $y = 0$ a $t = 0$ il campo elettrico dell'onda sia nullo determinare: a) le espressioni del campo elettrico E e del campo magnetico B dell'onda e il valore delle ampiezze; b) il valore della lunghezza d'onda λ ; c) la f.e.m. indotta in una spira quadrata di lato $a = \lambda/2$ disposta come in figura.

Soluzione a): $\vec{E}(y, t) = E_0 \sin(ky - \omega t) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{k} \right),$

$$\vec{B}(y, t) = \frac{E_0}{v} \sin(ky - \omega t) \left(\frac{1}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{k} \right),$$

$$E_0 = (4I^2 \frac{\mu}{\epsilon})^{1/4} \text{ e } B_0 = \frac{E_0}{v}$$

Soluzione b): $\lambda = \frac{1}{\nu} \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$

Soluzione c): f.e.m. = $-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{E_0 v}{\nu} \sin(\omega t)$