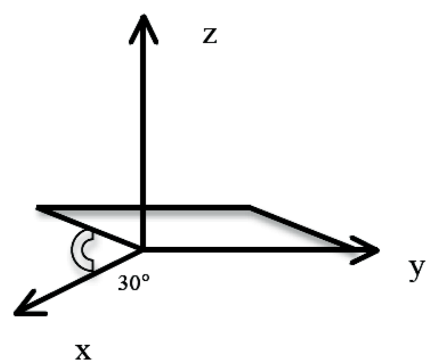
Elettromagnetismo: problemi

Prof. Marco Zaro
(basato sugli esercizi del Prof. X. Roca Maza)

2023-2024

9 Onde elettromagnetiche

9.1 Un'onda elettromagnetica piana si propaga lungo x in un mezzo con $\varepsilon_r = 1.5$. Il campo magnetico dell'onda è dato dalla relazione: $B_y = B_0 \cos(8 \times 10^8 t - 4x)$, con $B_0 = 1.8 \times 10^{-6}$ T e x e t espressi, rispettivamente, in m e s. Determinare:
a) i valori di frequenza e lunghezza d'onda della radiazione, nonché la sua velocità di propagazione e il valore della permeabilità magnetica del mezzo;
b) l'equazione del campo elettrico in funzione di x e t, e il valore della sua ampiezza;
c) la potenza che incide su di una superficie piana di area $A = 2.3 m^2$, perpendicolare al piano xz e che forma un angolo di $\theta = 30$ gradi col piano xy. Si calcoli anche la pressione di radiazione sulla stessa superficie, supponendola perfettamente riflettente.



Soluzione a): $f = 1.27 \times 10^8$ s^{-1}, $\lambda = 1.57$ m, $v = 2 \times 10^8$ m/s e $\mu_r = 1.5$
Soluzione b): $\vec{E} = -vB_0 \cos(\omega t - kx)\hat{k}$
Soluzione c): $P = \frac{1}{2}\frac{vB_0^2}{\mu} \sin\theta A = 198$ W e $p = \frac{B_0^2}{\mu} \sin\theta = 8.6 \times 10^{-7}$ N/m^2

9.2 Il campo di induzione magnetica di un'onda piana, che propaga in un dielettrico caratterizzato da ε_r e μ_r, con lunghezza d'onda λ, ha la seguente espressione:
$\vec{B}(y,t) = B_0 \left[\cos(ky - \omega t)\hat{\imath} - \sin(ky - \omega t)\hat{k}\right]$ con B_0 costante e uniforme
Determinare: a) la frequenza, il tipo di polarizzazione dell'onda e l'espressione del campo elettrico; b) la quantità media di energia elettromagnetica che è contenuta nel volume (parallelepipedo di sezione A perpendicolare all'asse y e altezza h) e quella che l'onda trasporta attraverso la base A in un tempo Δt; e c) la forza esercitata dall'onda sulla base A nell'ipotesi che essa sia totalmente assorbente.
Soluzione a: $f = \frac{c}{\lambda\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$, polarizzazione circolare,
e $\vec{E} = \frac{cB_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \left[\sin(ky - \omega t)\hat{\imath} + \cos(ky - \omega t)\hat{k}\right]$
Soluzione b: $\langle W_{\text{vol}} \rangle = \langle u \rangle V = \frac{1}{2}\frac{B_0^2}{\mu} Ah$ e $\langle W_{\text{sup}}(\Delta t) \rangle = \frac{1}{2}\frac{B_0^2}{\mu}\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} A\Delta t$
Soluzione c: $F = \frac{1}{2}\frac{B_0^2}{\mu} A$

9.3 Il campo elettrico di un'onda piana, di frequenza f, che propaga in un dielettrico trasparente caratterizzato da ε_r e μ_r, ha la seguente espressione:

$\vec{E}(x,t) = E_0\left[\sin(kx-\omega t)\hat{j} - \cos(kx-\omega t)\hat{k}\right]$

Determinare: a) il vettore d'onda k e le espressioni del campo $\vec{B}(x,t)$ e del vettore di Poynting $\vec{S}(x,t)$; b) il valore di E_0 sapendo che nell'intervallo di tempo Δt, su una superficie di area A giacente nel piano $x=0$ incide una quantità di energia W; e c) la forza esercitata sulla superficie del punto b) supponendo che la stessa sia totalmente assorbente.

Soluzione a): $k = 2\pi f\frac{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}{c}$

$\vec{B}(x,t) = \frac{E_0}{v}\left[\cos(kx-\omega t)\hat{j} + \sin(kx-\omega t)\hat{k}\right]$

$\vec{S}(x,t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\hat{\imath}$

Soluzione b): $E_0 = \left[\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{W^2}{A^2\Delta t^2}\right]^{1/4}$

Soluzione c): $F = \sqrt{\varepsilon\mu}\frac{W}{\Delta t}$

9.4 Un'onda elettromagnetica propaga nella direzione positiva dell'asse x, e il campo elettrico associato ha l'espressione:

$\vec{E}(x,t) = E_0\cos(kx-\omega t)\hat{j} + E_0\sin(kx-\omega t)\hat{k}$,

e il valore della pulsazione è ν. La propagazione dell'onda avviene in un mezzo assimilabile al vuoto. Determinare: a) i valori di k e λ, nonché l'espressione analitica del campo B in funzione di x e t; b) sapendo che una misura dell'intensità media della radiazione sul piano $x=0$ fornisce il valore I, si determinino i valori del modulo dei campi E e di B; e c) una sbarretta di metallo è disposta lungo la bisettrice del piano yz, ovvero ha come estremi $(y_A, z_A) = (0,0)$ e $(y_B, z_B) = (l,l)$. Si calcoli l'espressione della differenza di potenziale $V_A - V_B$ in funzione del tempo e il suo valore massimo.

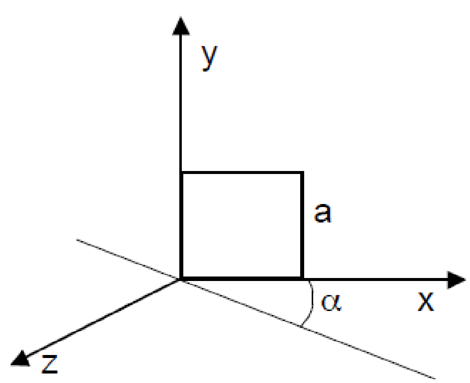
Soluzione a): $k = \frac{2\pi\nu}{c}$ e $\lambda = \frac{c}{\nu}$

$\vec{B}(x,t) = -\frac{E_0}{v}\sin(kx-\omega t)\hat{j} + \frac{E_0}{v}\cos(kx-\omega t)\hat{k}$,

Soluzione b): $E_0 = \left(\frac{I}{\varepsilon_0 c}\right)^{1/2}$ e $B_0 = \left(\frac{\mu_0 I}{c}\right)^{1/2}$

Soluzione c): $V_A - V_B = -E_0 l\sin(\omega t - \pi/4)$ e il suo valore massimo sarà per valori del $\sin(\omega t-\pi/4) = \pm 1$ e quindi $\omega t = -\pi/4, 3\pi/4$ ... e $V_A - V_B|_{\max} = \pm E_0 l$.

9.5 Un'onda piana di frequenza ν propaga in un mezzo dielettrico, caratterizzato da ε_r μ_r, nel verso positivo dell'asse y. L'onda è polarizzata linearmente lungo una direzione che forma un angolo $\alpha = 30$ rispetto all'asse x e ha intensità (media) I. Assumendo



che in $y=0$ a $t=0$ il campo elettrico dell'onda sia nullo determinare: a) le espressioni del campo elettrico E e del campo magnetico B dell'onda e il valore delle ampiezze; b) il valore della lunghezza d'onda λ; c) la f.e.m. indotta in una spira quadrata di lato $a = \lambda/2$ disposta come in figura.

Soluzione a): $\vec{E}(y,t) = E_0\sin(ky-\omega t)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{k}\right)$,

$\vec{B}(y,t) = \frac{E_0}{v}\sin(ky-\omega t)\left(\frac{1}{2}\hat{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{k}\right)$,

$E_0 = \left(4I^2\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/4}$ e $B_0 = \frac{E_0}{v}$

Soluzione b): $\lambda = \frac{1}{\nu} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$

Soluzione c): f.e.m. $= -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{E_0 v}{\nu} \sin(\omega t)$