Elettromagnetismo: problemi

Prof. Marco Zaro
(basato sugli esercizi del Prof. X. Roca Maza)

2023-2024

8 Fenomeni dipendenti dal tempo

8.1 Un condensatore piano con armature cicolari di sezione S e distanti h, viene caricato a una d.d.p. V_0, poi viene lasciato scaricare attarverso un resistore di resistenza R_0. Calcolare il flusso totale di energia, attraverso il calcolo del vettore di Poynting, dall'interno all'esterno del conduttore durante la scarica.
Soluzione: $W = \frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{2h}$

8.2 Un solenoide cilindrico lungo l, di raggio r e con N spire è percorso da una corrente I_0. Al tempo $t = 0$ viene fatto scaricare su una resistenza R. Tramite il vettore di Poynting, calcolare l'energia che il solenoide cede/acquisisce.
Soluzione: $W = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2 I_0^2}{2l}$

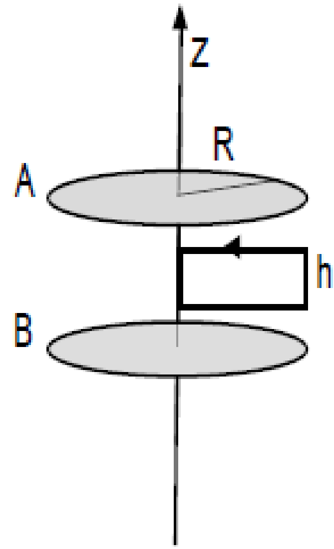
8.3 Ad un capo di un cavo coassiale ($R_1 < R_2$) viene applicata tra i due conduttori una tensione $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$. Trovare le equazioni differenziali a cui obbediscono la tensione tra i conduttori e la corrente lungo di essi in un punto generico del cavo (prendere l'asse del cilindro lungo z).
Soluzione: $V(z,t) = V_0 \cos(\omega t + \omega \frac{z}{c})$ e $i(z,t) = \frac{V_0}{cL_0} \cos(\omega t + \omega \frac{z}{c})$ dove L_0 è il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza $L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$.

8.4 Un condensatore piano con armature circolari di raggio R distanti d, tra le quali è presente un dielettrico di costante dielettrica ε_r, è inizialmente carico e la d.d.p. tra le armature vale ΔV_0. A partire dall'istante $t = 0$ s la d.d.p. viene fatta variare con la legge $\Delta V = \Delta V_0 - \alpha t$ con α costante. Utilizzando un sistema di coordinate cilindriche il cui asse z è perpendicolare alle armature e passa per il suo centro, calcolare all'istante t generico: a) il campo elettrico nel condensatore; b) la corrente di spostamento e il campo d'induzione magnetica per $0 < r < R$; e c) il vettore di Poynting e il flusso totale di energia per unità di tempo ai bordi del condensatore.
Soluzione a): $E(t) = \frac{\Delta V_0 - \alpha t}{d}$

Soluzione b): $\vec{j}_s = -\varepsilon \frac{\alpha}{d} \hat{k}$ e $\vec{B} = -\frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon \frac{\alpha}{d} r \hat{\theta}$

Soluzione c): $\vec{S} = \frac{1}{2} \frac{\Delta V_0 - \alpha t}{d} \varepsilon \frac{\alpha}{d} r \hat{r}$ e $\phi(R) = \frac{\Delta V_0 - \alpha t}{d} \pi R^2 \varepsilon \alpha$

8.5 Alle armature circolari di un condensatore piano di raggio R e distanza reciproca d è applicata come in figura una d.d.p. $V_A - V_B = V_0 \sin(\omega t)$ con V_0 costante e $T = 2\pi/\omega$. Trascurando gli effetti di bordo e utilizzando un sistema di coordinate cilindriche, determinare: a) il vettore induzione magnetica e il vettore di Poynting all'interno del condensatore; b) il valore del flusso totale di energia (specificando se entrante o uscente) attraverso la superficie delimitante il condensatore dall'istante $t = 0$ all'istante $t = T/4$; e c) l'espressione della f.e.m. indotta nella spira rettangolare orientata come in figura di altezza h e base R posta tra le armature del condensatore con il lato minore sull'asse di questo calcolandone il valore a $t = T/2$.



Soluzione a): $\vec{B} = -\frac{1}{2}\frac{\omega r}{c^2}\frac{V_0}{d}\cos(\omega t)\hat{\theta}$ e $\vec{S} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \omega r \frac{V_0^2}{d^2}\cos(\omega t)\sin(\omega t)\hat{r}$
Soluzione b): $\Delta\phi = -\frac{1}{2}\pi R^2 \varepsilon_0 \frac{V_0^2}{d}$ (flusso entrante)
Soluzione c): f.e.m. $= \frac{\omega^2 V_0 h R^2}{4c^2 d}\sin(\pi) = 0$

8.6 Una superficie cilindrica, di raggio a e lunghezza $l \gg a$, è uniformemente carica con densità superficiale σ. La superficie ruota attorno al suo asse con una velocità angolare (lentamente) variabile $\omega(t)$ (si prenda l'asse z orientato concorde con ω). All'interno della superficie c'è il vuoto. Calcolare il campo elettrico a distanza $r < a$ dall'asse di rotazione, e il flusso di energia per unità di tempo attraverso la superficie.
Soluzione: $\vec{E}(r) = -\frac{\mu_0 \sigma a r}{2}\frac{d\omega}{dt}\hat{\phi}$

8.7 Un condensatore piano circolare di raggio R le cui armature distano d viene caricato e scaricato in maniera ciclica nel tempo. La carica sulle armature segue la legge $Q(t) = Q_0 \sin\omega t$. Calcolare il campo elettrico E_0 nel condensatore e il campo magnetico indotto. Calcolare inoltre il campo elettrico E_1 indotto dalla variazione del campo magnetico, e il rapporto $\frac{E_0}{E_1}$. A seconda del valore di tale rapporto, giustificare o meno l'uso dell'approccio descritto nell'esercizio per il calcolo dei campi.
Soluzione: $\vec{E}_0 = \frac{Q_0 \sin\omega t}{\pi R^2 \varepsilon_0}\hat{z}$; $\vec{B} = \frac{\mu_0 Q_0 \omega \cos\omega t}{2\pi R^2}\hat{z}$; $\vec{E}_1 = -\frac{\mu_0 Q_0 \omega^2 \sin\omega t}{4\pi R^2}\hat{z} = -\vec{E}_0\frac{\omega^2 r^2}{4c^2}$.