Elettromagnetismo: problemi

Prof. Marco Zaro
(basato sugli esercizi del Prof. X. Roca Maza)

2023-2024

7 Induzione elettromagnetica

7.1 Una sottile sbarra conduttrice, lunga l, giace nel piano xy e si muove di moto traslatorio con velocità v costante parallela all'asse x; la normale alla sbarra forma un angolo α con l'asse x. La sbarra è immersa in un campo magnetico uniforme e costante di modulo B, che non ha componente lungo l'asse y e forma un angolo β con l'asse x. Calcolare la tensione che compare ai capi della sbarra in seguito al moto.

Soluzione: $\varepsilon = vBl \sin\beta \cos\alpha$

7.2 Una sottile sbarra rettilinea conduttrice, lunga l, è incernierata ad un estremo attorno al quale ruota con velocità angolare costante ω. Essa è immersa in un campo magnetico uniforme e costante, di modulo B, parallelo e concorde a ω. Calcolare il valore e il segno della tensione che compare ai capi della sbarra.

Soluzione: $\varepsilon = -\frac{1}{2}\omega B l^2$ (carica negativa si concentra nel estremo incernierato e carica positiva nel estremo opposto)

7.3 Un conduttore metallico di resistenza trascurabile è piegato a U e contenuto nel piano xy; i tratti paralleli distano l e sono orientati concordi all'asse x. Su di esso può spostarsi senza attrito una sbarra conduttrice di resistenza R ortogonale ai tratti paralleli. Se tale conduttore viene mantenuto in moto secondo il verso positivo dell'asse x con velocità costante di modulo v e se il dispositivo è immerso in un campo magnetico uniforme e costante, ortogonale al circuito e diretto verso z positivi, di modulo B, calcolare il valore della corrente indotta nel circuito e la potenza che occorre spendere per mantenere in movimento il conduttore mobile.

Soluzione: $i = \frac{Blv}{R}$ e $P = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$

7.4 Nella stessa configurazione del problema 7.3, la sbarra viene messa in moto, con velocità parallela all'asse x, tramite l'applicazione in un tempo trascurabile di un impulso $\vec{P} = P\hat{i}$. Dare l'equazione del moto della sbarra e la legge di variazione nel tempo della corrente indotta nel circuito. La massa della sbarra vale m. Calcolare l'energia dissipata per effetto Joule.

Soluzione: $v = \frac{P}{m} \exp\left(-\frac{B^2 l^2}{mR} t\right)$; $i = \frac{PBL}{mR} \exp\left(-\frac{B^2 l^2}{mR} t\right)$ e $W = \frac{1}{2} m \left(\frac{J}{m}\right)^2$

7.5 Una spira conduttrice quadrata contenuta nel piano xy, di lato l, massa m e resistenza R, si muove con velocità costante v_0 (per $x < 0$) lungo l'asse x. Nel semipiano $x \geq 0$ esiste un campo magnetico B, uniforme e costante, lungo l'asse z e con verso positivo. Nel semipiano $x < 0$ il campo magnetico è zero. Si calcoli la velocita v della spira dopo che essa è entrata completamente nel semipiano $x \geq 0$ e il tempo t che occorre perché ciò avvenga, a partire dell'istante $t = 0$ in cui la spira entra nella zona con campo magnetico. Discuttere l'andametento della velocità nelle diverse zone.

Soluzione: $v = v_0 - \frac{B^2 l^3}{mR}$ e $t = \frac{mR}{B^2 l^2} \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{B^2 l^3}{mRv_0}}\right)$

7.6 Un circuito rettangolare giacente nel piano xy ha i due lati paralleli all'asse x distanti l, fissi e di resistenza trascurabile. Gli altri due lati, paralleli all'asse y, sono due sbarre condutrici di massa m, resistenza R, e che si possono muovere con attrito trascurabile. Il circuito è immerso in un campo magnetico uniforme di modulo B parallelo e concorde all'asse z.
La sbarra di sinistra si muove verso quella di destra con velocità costante v_0 (diretta come l'asse x). Se al tempo ($t = 0$) la sbarra di destra è ferma, calcolarne la velocità ai tempi successivi.

Soluzione: $v = v_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{B^2 l^2}{2mR} t\right)\right]$

7.7 Un cilindro di materiale conduttore, inizialmente neutro, di raggio $R = 5$ cm viene posto in rotazione attorno al proprio asse con frequenza $f = 50$ Hz. È presente un campo magnetico costante $B = 0.1$ T diretto lungo l'asse del cilindro. Determinare: a) il campo elettrico E nel materiale e la ddp tra un punto sull'asse e il bordo del cilindro; b)la distribuzione di carica di volume e di superficie; e c) la energia elettrostatica per unità di lunghezza.

Soluzione a): $\vec{E} = -2\pi f B \vec{r}$ e $\Delta V = \pi f B R^2$ (carica negativa si concentra nel centro e la positiva nella superficie laterale del cilindro)

Soluzione b): $\rho = -4\pi\varepsilon_0 f B$ e $\sigma = 2\pi\varepsilon_0 f B R$ (e la carica totale $Q = 0$).

Soluzione c): $\frac{W}{l} = \pi^3 \varepsilon_0 f^2 B^2 R^4$

7.8 Una spira circolare di raggio $R_1 = 10$ cm giace sul piano xy, ed è percorsa in verso antiorario da una corrente stazionaria $I_1 = 50$ A. Sull'asse z della spira, a distanza $z_0 = 1$ cm, si trova una seconda spira il cui raggio $R_2 = 0.5$ cm può essere preso come molto piccolo rispetto a R_1. La seconda spira ha una resistenza $R = 0.01\ \Omega$. a) Si calcoli quanto vale il campo magnetico nel punto in cui si trova la spira; b) La seconda spira viene trascinata da $z_0 = 1$ cm a $z_1 = 11$ cm. Si calcoli quanta carica totale ha attraversato la seconda spira in questo intervallo di tempo. Si calcoli la corrente media che attraversa la spira in questo intervallo assumendo che la spira è stata trascinata a velocità costante $v = 0.02$ m/s; e c) Si scriva l'espressione della corrente nella seconda spira (assumendo velocità costante $v = 0.02$ m/s), e se ne calcoli il valore quando la stessa si trova a $z_2 = 2$ cm.

Soluzione a): $\vec{B} = \frac{\mu_0 i_1}{2} \frac{R_1^2}{\left(z_0^2 + R_1^2\right)^{3/2}} \hat{k}$

Soluzione b): $Q_2 = \frac{\pi}{2} \frac{\mu_0 i_1}{R} \left[\frac{R_1^2 R_2^2}{\left(z_0^2 + R_1^2\right)^{3/2}} - \frac{R_1^2 R_2^2}{\left(z_1^2 + R_1^2\right)^{3/2}}\right]$ e $\bar{i}_2 = \frac{Q_2 v}{z_1 - z_0}$

Soluzione c): $i_2 = \frac{3\pi}{2} \frac{\mu_0 i_1 v}{R} \frac{R_1^2 R_2^2 z_2}{\left(z_2^2 + R_1^2\right)^{5/2}}$

7.9 Una spira quadrata di lato $l = 5$ cm e massa $m = 60$ g si trova sul piano xy, e nella stessa regione è presente un campo B, ortogonale al piano, con modulo non uniforme ma variabile secondo la legge $B(x) = B_0 x / x_0$ con $B_0 = 2$ T e $x_0 = 10^{-2}$ m. La spira quadrata si muove con velocità $v = 1$ m/s (costante) nella direzione dell'asse x partendo all'istante $t = 0$ completamente nel semipiano $x > 0$ ma con un lato perpendicolare a x e nella posizione $x = 0$. a) Calcolare la corrente indotta nella spira sapendo che la resistenza della stessa è 0.25 Ω; b) Calcolare le forze agenti sui lati della spira a causa della presenza di B, e la forza necessaria dall'esterno per mantenere v costante; e c) Calcolare la carica totale che fluisce nella spira nel tragitto tra 0 e 20 cm, la potenza dissipata per effetto Joule e il lavoro compiuto dall'esterno.

Soluzione a): $i = \frac{B_0 v l^2}{x_0 R}$

Soluzione b): $\vec{F}_{\text{TOT}} = -\frac{B_0^2 v l^4}{x_0^2 R} \hat{i}$ e $\vec{F}_{\text{EST}} = -\vec{F}_{\text{TOT}}$

Soluzione c): $Q = \frac{B_0 l^2}{x_0 R} \Delta x$; $P = \frac{B_0^2 v^2 l^4}{x_0^2 R}$; e $\mathcal{L} = \frac{B_0^2 v l^4}{x_0^2 R} \Delta x$

7.10 Una lamina sottile di conduttore, le cui basi A e B sono parallele al piano yz ed hanno superficie S =100 cm^2, e il cui spessore è d =0.5 cm, si muove con velocità $v = 0.3$ m/s sull'asse y. Lungo l'asse z è presente un campo di induzione magnetica $B = 1$ T, uniforme e costante. Si determini, assumendo che non vi siano effetti di bordo nella lamina: a) la distribuzione di carica elettrica presente nella lamina; b) la differenza di potenziale elettrostatico che si crea tra le basi A e B; e c) ad un dato istante t_0 il moto della lamina viene interrotto. Sapendo che la resistività del materiale è $\rho = 3.010^{-8}$ Ωm, si scriva la corrente elettrica che si crea nella lamina in funzione di $t > t_0$.

Soluzione a): $\sigma_A = \varepsilon_0 vB$; $\sigma_B = -\varepsilon_0 vB$ (non c'è distribuzione volumica di carica)

Soluzione b): $V_A - V_B = vBd$

Soluzione c): $i = \frac{vBS}{\rho} \exp\left(-\frac{t-t_0}{\varepsilon_0 \rho}\right)$

7.11 La sbarretta conduttrice AB di lunghezza $L = 5$ cm scivola priva di attrito con velocità costante $\vec{v} = 2\hat{\imath}$ m/s lungo due guide conduttrici a U, mantenendosi ortogonale ad esse. La guida condutrice ad U ha resistenza $R = 2\ \Omega$, mentre la sbarretta ha resistenza trascurabile. A distanza $d = 3$ cm da una delle guide è posto un filo rettilineo indefinito che giace nel piano del sistema guida-sbarreta, è parallelo alle guide ed è percorso da una corrente I =100 A verso $-\hat{\imath}$. Calcolare: a) il valore e il verso della corrente indotta nella sbarretta; b) la forza da applicare alla sbarretta per mantenere costante la sua velocità; c) l'energia dissipata sulla resistenza R e il lavoro fatto dalla forza applicata, nel tempo impiegato dalla sbarretta a percorrere una distanza pari a 10 m.

Soluzione a): $i = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \ln\left(\frac{L+d}{d}\right)$

Soluzione b): $\vec{F}_{\text{app}} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)^2 \frac{v}{R} \left[\ln\left(\frac{L+d}{d}\right)\right]^2 \hat{\imath} = \frac{i^2 R}{v}\hat{\imath}$

Soluzione c): $W = i^2 R \frac{\Delta x}{v}$ e $\mathcal{L} = F_{\text{app}} \Delta x$ (i due risultati coincidono)

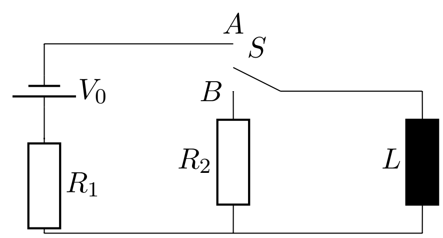
7.12 Una sbarra conduttrice di massa m= 100 g e resistenza lineare R_L= 0.2 Ω/m scorre nel piano xy su due guide conduttrici, di resistenza trascurabile, connesse nell'origine degli assi e formanti un angolo α= 20^o. Una delle due guide coincide con l'asse x, e la sbarra è ortogonale ad essa. In tutto lo spazio è presente il campo magnetico lungo l'asse z B_0= 0.1 T. All'istante iniziale t =0 la sbarra si trova nella posizione $x_0 = 0.5$ m con velocità v_0= 1 m/s. Determinare: a) la corrente indotta in funzione della distanza e indicarne il verso (orario o antiorario); b) l'espressione della velocita $v(x)$ in funzione della distanza e la posizione di arresto della sbarra; e c) la energia dissipata durante il percorso da x_0 a x_0+2m.

Soluzione a): $i = \frac{Bv}{R_L} = \frac{B}{R_L}\left[v_0 - \frac{B^2 \tan\alpha}{mR_L}\left(x^2 - x_0^2\right)\right]$ (orario)

Soluzione b): $v(x) = v_0 - \frac{B^2 \tan\alpha}{2mR_L}\left(x^2 - x_0^2\right)$ e $x_{\text{arresto}} = \sqrt{x_0^2 + \frac{2mR_L v_0}{B^2 \tan\alpha}}$

Soluzione c): $W = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 - v^2\right)$

7.13 Nel circuito in figura, all'istante $t = 0$ s, l'interruttore S viene chiuso nella posizione A. Una volta raggiunta la condizione di regime esso viene spostato in un tempo trascurabile nella posizione B. Dare l'andamento nel tempo della corrente attraverso l'induttore se si conoscono V_0, R_1, R_2 e L. Determinare inoltre nella prima connessione l'espressione dell'energia spesa dal generatore dal tempo iniziale a un tempo t generico, quella dissipata dal resistore R_1 e quella immagazzinata nell'induttore. Verificare che, avvenuta la chiusura nella posizione B, nel resistore R_2 viene dissipata tutta l'energia magnetica immagazzinata nell'induttore.



Soluzione: S chiuso nella posizione A: $i(t) = \frac{V_0}{R_1}\left[1 - \exp\left(-\frac{R_1}{L}t\right)\right]$; $i(t \to \infty) \equiv i_\infty = \frac{V_0}{R_1}$; $W_{\text{gen}} = \frac{V_0^2}{R_1^2} L \left[\frac{R_1}{L}t + \exp\left(-\frac{R_1}{L}t\right) - 1\right]$; $W_{\text{Joule}} = \frac{V_0^2}{R_1}\left[t - \frac{L}{R_1}\left(\frac{3}{2} - 2\exp\left(-\frac{R_1}{L}t\right) + \frac{1}{2}\exp\left(-2\frac{R_1}{L}t\right)\right)\right]$; $W_L = \frac{1}{2}\frac{V_0^2 L}{R_1^2}\left(1 - 2\exp\left(-\frac{R_1}{L}t\right) + \exp\left(-2\frac{R_1}{L}t\right)\right) = W_{\text{gen}} - W_{\text{Joule}}$.

S chiuso nella posizione B (prendendo $t = 0$ nell'istante di chiusura): $i(t) = \frac{V_0}{R_1}\exp\left(-\frac{R_2}{L}t\right)$, $W_{R_2} = \frac{V_0^2}{2R_1^2} L = \frac{1}{2} L i_\infty$

7.14 Su un piano orizzontale si trovano un filo indefinito percorso da una corrente i_1, e una spira quadrata di lato L percorsa da una corrente i_2. La spira ha un lato parallelo al filo che si trova ad una distanza

d dal filo stesso; su questo lato, le correnti nel filo e nella spira sono concordi. a) Si calcolino le forze che il filo esercita sui diversi lati della spira, e la risultante di tale forza; b) Si scrivano le espressioni analitiche del coefficiente di mutua induzione e dell'energia magnetica di interazione tra filo e spira; c) Si mostri che dall'energia magnetica scritta al punto b) si ricava la stessa espressione della forza risultante sulla spira già ricavata a a).

Soluzione a): $\vec{F}_{\text{tot}} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 L^2}{2\pi d(d+L)}\hat{\imath}$ dove la forza per ogni pezzo di filo della spira è:

- Filo spira parallelo al filo indefinito e lontano d: $\vec{F} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi d}\hat{\imath}$
- Filo spira parallelo al filo indefinito e lontano $L + d$: $\vec{F} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi(d+L)}\hat{\imath}$
- Filo spira perpendicolare (sotto) al filo indefinito: $\vec{F} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)\hat{\jmath}$
- Filo spira perpendicolare (sopra) al filo indefinito: $\vec{F} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)\hat{\jmath}$

Soluzione b): $M_{12} = \frac{\mu_0 L}{2\pi}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)$ e $W_{\text{int}}(d) = \frac{\mu_0 L i_1 i_2}{2\pi}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)$
Soluzione c): $\vec{F} = \vec{\nabla}W_{\text{int}}(x)$.

7.15 Un cavo coassiale di raggi a e b è percorso da una corrente I. Calcolare l'energia immagazzinata per unità di lunghezza nei casi: a) il conduttore interno è vuoto; e b) il conduttore interno è riempito (materiale con permitività relativa μ_r) e la corrente che lo percorre e' volumica; c) determinare il valore di μ_r se il coefficiente di autoinduzione del filo coassiale L_b e quello del conduttore interno L_a sono tali che $L_b = 2L_a$.
Soluzione a): $\frac{W}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ **Soluzione b):** $\frac{W}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left[\frac{\mu_r}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$
Soluzione c): $\mu_r = 4\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

7.16 Per due induttori qualsiasi percorsi da una corrente diversa, determinare a) il valore massimo del coefficiente di mutua induzione; e b) l'energia massima d'interazione.
Soluzione a): $M \equiv M_{12} = M_{21} \leq \sqrt{L_1 L_2}$ **Soluzione b):** $W_{\text{int}} \leq \sqrt{L_1 L_2}i_1 i_2$

7.17 Due solenoidi coassiali molto lunghi sono percorsi da intensità diverse ma costanti e nello stesso verso. I due solenoidi hanno sezioni diverse e densità di spire per unità di lunghezza anche diverse. Il solenoide con sezione più piccola è messo un tratto x dentro l'altro solenoide di sezione maggiore. Determinare la forza con cui si attragono/respingono assumendo che il campo magnetico creato dai solenoidi fuori sia trascurabile.

Soluzione: $F = \mu_0 n_> n_< S_< I_> I_<$ (con $>$ e $<$ indichiamo quantità del solenoide grande e piccolo rispettivamente).

7.18 Un circuito a U ha i due lati paralleli rivolti in verticale verso il basso. Una sbarra orizzontale lunga l e di massa m scivola senza attrito a contatto con i due bracci, soggetta solamente alla forza peso. Al tempo $t = 0$ la sbarra è ferma. Ortogonale al piano del circuito è presente un campo magnetico costante e uniforme di modulo B. Ricavare la dipendenza della corrente nel tempo, la legge del moto della sbarra e il bilancio energetico nei seguenti casi:

a) Nel circuito è presente una resistenza R.
Soluzione: $v(t) = \frac{gmR}{l^2B^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{l^2B^2t}{Rm}\right)\right]$; $I(t) = \frac{Blv(t)}{R}$.

b) Nel circuito è presente un condensatore di capacità C.
Soluzione: $v(t) = gt\left(1 + \frac{B^2l^2C}{m}\right)^{-1}$; $I(t) = CBlg\left(1 + \frac{B^2l^2C}{m}\right)^{-1} = \text{cost.}$

c) Nel circuito è presente un'induttanza L.
Soluzione: $v(t) = \frac{g}{\omega}\sin\omega t$; $v(t) = -g\sqrt{\frac{m}{L}}\cos\omega t$; $\omega = \frac{lB}{\sqrt{mL}}$.

7.19 Una sbarra conduttrice di resistenza R, massa m e lunghezza l è posta ortogonale ai bracci paralleli di un circuito a U. Sbarra e circuito giacciono nel piano orizzontale. Un campo magnetico di intensità B è diretto lungo la verticale. Nel circuito è presente un generatore, che genera una corrente I concorde al campo magnetico. Al tempo $t = 0$ la sbarretta, da ferma, è lasciata libera di muoversi. Ricavare la dipendenza della corrente nel tempo e la legge del moto della sbarra nei seguenti casi:

a) Il generatore mantiene la corrente I costante. Calcolare la potenza del generatore.
   Soluzione: $v(t) = \frac{IlB}{m}t$; $P = I^2\left(R + \frac{B^2l^2t}{mR}\right)$.

b) Il generatore mantiene una f.em. pari a V_0. Calcolare il lavoro fatto dal generatore da $t = 0$ a $t = \infty$.
   Soluzione: $v(t) = \frac{V_0}{Bl}\left[1 - \exp\left(-\frac{l^2B^2t}{Rm}\right)\right]$; $W = m\left(\frac{V_0}{Bl}\right)^2$.