Elettromagnetismo: problemi

Prof. Marco Zaro
(basato sugli esercizi del Prof. X. Roca Maza)

2023-2024

6 Magnetostatica nella materia

6.1 Un cilindro di materiale omogeneo ed isotropo, di diametro molto piccolo rispetto alla sua altezza è disposto parallelamente alle linee di forza di un campo di induzione magnetica $\vec{B}_0$ (nel vuoto). Discuttere la configurazione assunta dai campi vettoriali $\vec{B}, \vec{H}$ e $\vec{M}$.

Soluzione: considerando che la circuitazione di $\vec{H}$ e il flusso di $\vec{B}$ uscente da una superficie chiusa sono nulli, si ottengono le condizioni di raccordo tra due mezzi di queste quantità: $B_{1n} = B_{2n}$ e $H_{1t} = H_{2t}$. Poi usando $\vec{B} = \mu\vec{H}$ si ottengono $\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$ e $H_{1n}\mu_1 = H_{2n}\mu_2$

Esternamente al materiale: $\vec{M}_0 = 0$ e $\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$.

Nel materiale: $H_{0t} = H_t = H_0$; $H_n = \frac{\mu_0}{\mu}H_{0n} = 0$; $B_{0n} = B_n = 0$; $B_t = \frac{\mu}{\mu_0}B_{0t} = \mu_r B_0$ e $\vec{M} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0}\vec{B}_0$.

6.2 Un cilindro molto lungo di ferro (e quindi un materiale ferromagnetico), lungo $d \equiv z_2 - z_1$ e di raggio R, è magnetizzato uniformemente, con magnetizzazione M e parallela all'asse del cilindro. Determinare come varia il campo B generato da questo cilindro e in particolare nel limite $d \to \infty$. Calcolare la circuitazione di B, H e M lungo una linea chiusa Γ_1 che attraversa il cilindro in tutta la sua lunghezza e lungo un'altra linea chiusa Γ_2 che passa nel materiale solamente per metà della sua lunghezza. Infine discuttere la configurazione assunta dai campi vettoriali $\vec{B}$ e $\vec{H}$ assumanedo che $\vec{B}(\vec{H})$ è nel secondo quadrante del ciclo di isteresi dove $\vec{B}$ e $\vec{H}$ hanno versi opposti.

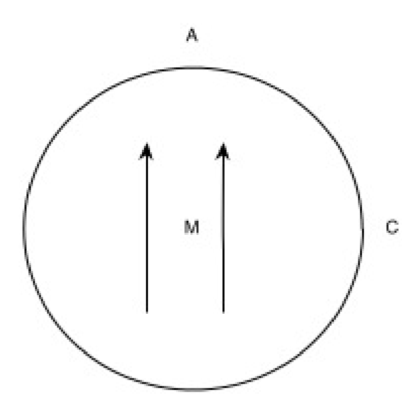
Soluzione: $\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 M \left(\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2+R^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+R^2}} \right)\hat{k}$; $\vec{B}_\infty = \mu_0 M\hat{k}$;

$\oint_{\Gamma_{1,2}} \vec{H} \cdot \vec{dl} = 0$;

$\oint_{\Gamma_1} \vec{M} \cdot \vec{dl} = Md$; $\oint_{\Gamma_2} \vec{M} \cdot \vec{dl} = Md/2$;

$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 Md$; $\oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 Md/2$;

6.3 Un cilindro di lunghezza indefinita possiede una magnetizzazione permanente $M = 6 \times 10^5$ A/m uniforme e diretta ortogonalmente al proprio asse. In figura è rappresentata una sezione del cilindro. Determinare: a) le densità volumetriche e superficiali delle correnti di magnetizzazione; b) i vettori $\vec{B}$ e $\vec{H}$ sull'asse del cilindro; e c) i vettori $\vec{B}$ e $\vec{H}$ nei punti A e C indicati in figura, posti immediatamente all'esterno del cilindro, supponendo che $\vec{B}$ e $\vec{H}$ siano uniformi all'interno del cilindro.



Soluzione a): $\vec{j_v} = 0$ e $\vec{j_s} = -M\cos\theta\hat{k}$
Soluzione b): $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\vec{M}$ e $\vec{H} = -\frac{1}{2}\vec{M}$
Soluzione c): $\vec{B}_A = \frac{\mu_0}{2}\vec{M}$; $\vec{H}_A = \frac{1}{2}\vec{M}$; $\vec{B}_C = -\frac{\mu_0}{2}\vec{M}$; e $\vec{H}_C = -\frac{1}{2}\vec{M}$.

6.4 Un avvolgimento di N spire, percorse dalla corrente i, è disposto su di una superficie toroidale circolare a sezione quadrata di area S e lunghezza media l. Lo spazio interno a tale solenoide e completamente riempito di un materiale con permeabilità relativa μ_r costante per un largo intervallo di valori di $\vec{H}$. Calcolare i valori dei campi $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{M}$ entro il solenoide nonché il flusso di $\vec{B}$.
Soluzione: $\vec{H} = \frac{iN}{l}\hat{\theta}$, $\vec{B} = \frac{\mu iN}{l}\hat{\theta}$, $\vec{M} = (\mu_r - 1)\frac{iN}{l}\hat{\theta}$, $\Phi = \frac{\mu iNS}{l}$

6.5 Ripetere il problema 6.4 nel caso in cui il mezzo presenti un taglio con le facce ortogonali alle linee di $\vec{B}$, di lunghezza d. Si suponga trascurabile il flusso disperso e si considerino i campi uniformi sulla sezione.
Soluzione: $\vec{B} = \frac{\mu iN}{l-d+\mu_r d}\hat{\theta}$, $\vec{H}_{\text{es}} = \mu_r\frac{iN}{l-d+\mu_r d}\hat{\theta}$, $\vec{H}_{\text{in}} = \frac{iN}{l-d+\mu_r d}\hat{\theta}$, $\vec{M} = (\mu_r - 1)\frac{iN}{l-d+\mu_r d}\hat{\theta}$ and $\Phi = \frac{\mu iNS}{l-d+\mu_r d}$

6.6 Un cilindro di lunghezza l e raggio R è magnetizzato uniformemente lungo la direzione del suo asse $(\hat{k})$. Il suo momento magnetico è m. Fare una stima di $\vec{B}$ al interno del cilindro e calcolare la corrente di magnetizzazione.
Soluzione: $\vec{B} = \mu_0\frac{m}{l\pi R^2}\hat{k} = \mu_0\frac{m}{V}\hat{k}$; $J_s = \frac{m}{V}\hat{\theta}$.

6.7 Un magnete permanente è costituito da un anello tagliato di materiale ferromagnetico in cui il traferro ha spessore $d = 5$ mm. Si vuole ottenere nel traferro un campo di induzione $B = 0.3$ T diretto perpendicolare alla superficie del taglio. Il materiale ha le seguenti proprietà: lunghezza media del materiale l, magnetizzazione residua $M_r = 3 \times 10^5$ A/m, campo coercitivo $H_c = 7.5 \times 10^4$ A/m, ciclo di isteresi lineare nella zona di interesse. Determinare, assumendo positivo il verso di $\vec{B}$: a) $\vec{H}$ nel materiale; b) la lunghezza media l; e c) $\vec{M}$ e la corrente totale di magnetizzazione.
Soluzione a): $\vec{H}_{\text{int}} = -H_c + \frac{H_c}{\mu_0 M_r}B\hat{\theta} = -1.53 \times 10^4\hat{\theta}$ A/m
Soluzione b): $l = -\frac{\vec{H}_{\text{est}}}{\vec{H}_{\text{int}}} = 78$ mm
Soluzione c): $\vec{M} = \left[H_c + \frac{B}{\mu_0}\left(1 - \frac{H_c}{M_r}\right)\right]\hat{\theta} = 2.5 \times 10^5\hat{\theta}$ A/m e $i = Ml = 2.1 \times 10^4$ A.