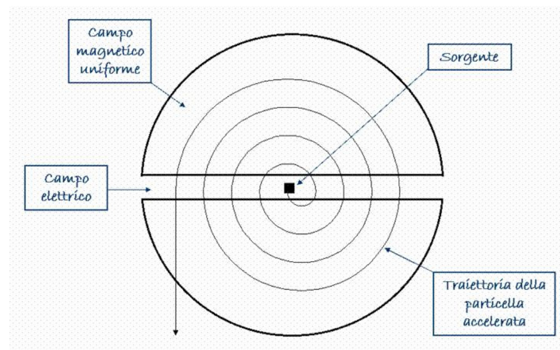
Elettromagnetismo: problemi

Prof. Marco Zaro
(basato sugli esercizi del Prof. X. Roca Maza)

2023-2024

5 Magnetostatica nel vuoto



5.1 Trovare le equazioni del moto per una particella con carica q e massa m somessa all'azione di un campo magnetico uniforme lungo la direzione dell'asse z, $\vec{B} = B\hat{k}$. Considerare che all'istante $t = 0$ la particella è nell'origine di coordinate: $x(t = 0) = 0$, $y(t = 0) = 0$, $z(t = 0) = 0$; e ha una velocità $\vec{v}(t = 0) = 0\hat{i} + v_0\hat{j} + 0\hat{k}$.

Soluzione:
$x(t) = -\frac{mv_0}{qB}\cos(\frac{qB}{m}t) + \frac{mv_0}{qB}$
$y(t) = \frac{mv_0}{qB}\sin(\frac{qB}{m}t)$
$z(t) = 0$
Questa soluzione corrisponde ad un moto circolare nel piano XY con centro in $x = \frac{mv_0}{qB}$ e raggio $R = \frac{mv_0}{qB}$.

5.2 Dimostrare che la frequenza di rotazione della particella del problema precedente non dipende dalla velocità o dal raggio dell'orbita. Trovare la relazione tra raggio dell'orbita e velocità della stessa particella. Nella figura (sopra) è rappresentato lo schema di un ciclotrone. Calcolare la velocità di uscita della stessa particella considerando prima che questa sia un eletrone e, poi, un protone. L'intensità del campo magnetico è di $B = 10^{-4}$T e il ciclotrone ha un raggio $R = 1$ m. Discuttere se l'approccio non relativistico adottato per descrivere il moto della particella nel ciclotrone è realistico.
Soluzione: $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$; $v = \frac{qRB}{m}$; $v_e = 0.6c$ e $v_p = 0.0003c$ dove c è la velocità della luce.

5.3 Considerare due elementi $d\vec{l_1}$ e $d\vec{l_2}$ di un circuito percorso da una intensità I. Nel caso in cui esista un piano di simmetria tra loro, dimostrare che il campo magnetico creato nei punti di questo piano è perpendicolare (o zero) al medessimo piano.

Soluzione: Considerando la distanza da un punto generico del piano di simmetria $\vec{r} \equiv \vec{a} + \vec{b}$, dove $2\vec{a}$ è il vettore che unisce $d\vec{l_1}$ e $d\vec{l_2}$ e, quindi, $\vec{b}$ è contenuto nel piano di simmetria: $d\vec{B}_{\text{piano}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi[(a^2+b^2)]^{3/2}}|\vec{b} \times (d\vec{l_1} + \vec{l_2})|\hat{e}_\perp$.

5.4 Calcolare il campo magnetico creato da un filo infinito percorso da un conrrente I: a) tramite calcolo diretto; b) applicando il Teorema di Ampere.
Soluzione: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}$

5.5 Una spira rettangolare di lati a e b è appesa dal punto medio del lato b. Per la spira circola un corrente I. Un campo magnetico uniforme forma un angolo α con il vettore $\vec{S}$ che definisce il piano della spira (nota: prendere α contenuto nel piano perpendicolare a quello della spira). a) Determinare la forza in ogni lato della spira dovuta al campo esterno $\vec{B}$; b) determinare la forza risultante e il momento orientatore ($\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ dove $\vec{m} = I\vec{S}$).

Soluzione a): $\vec{F}_{a1} = -\vec{F}_{a2} = IaB$ e $\vec{F}_{b1} = -\vec{F}_{b2} = IbB\cos\alpha$
Soluzione b): $\vec{F}_{\text{tot}} = 0$ e $|\vec{M}| = IabB\sin\alpha$

5.6 Calcolare il campo magnetico creato da una spira circolare di raggio R e percorasa da un corrente I nei punti del suo asse (che assumiamo essere l'asse z).
Soluzione: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$

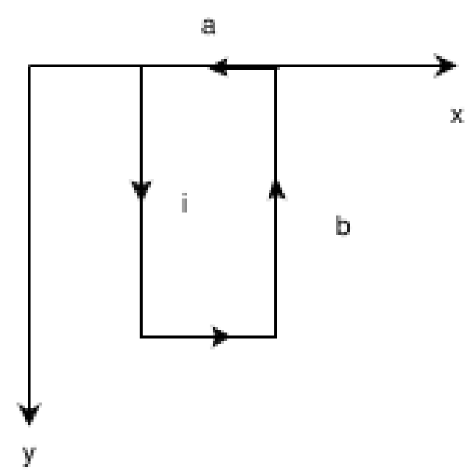
5.7 Dimostrare che il campo magnetico all'interno di un solenoide infinito è uniforme (non dipende della posizione) ed è diretto lungo l'asse del solenoide ($\vec{B} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + B\hat{k}$).
Aiuto: i) usare il teorema di Ampere per dimostrare che non c'è componente $\hat{\theta}$, poi ii) usare il fatto che il campo magnetico attraverso una superfice chiusa è zero per dimostrare che non ha componente in $\hat{r}$; infine iii) usare di nuovo il teorema di Ampere per dimostrare che il campo deve essere uniforme.

5.8 Calcolare il campo magnetico lungo l'asse di un solenoide di raggio R, lunghezza l ($l = z_2 - z_1$), percorso da una intensità I e densità lineare di spire $n = N/l$. Trovare la soluzione nel caso in cui il solenoide sia infinito e usare il teorema di Ampere per comprovare quest'ultimo risultato.
Soluzione: $\vec{B} = \frac{\mu_0 In}{2}\left(\frac{z_2}{\sqrt{R^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{R^2+z_1^2}}\right)\hat{k}$; $\vec{B}_\infty = \mu_0 In\hat{k}$

5.9 Un disco di raggio R, ha una densità superficiale di carica σ. Il disco ruota con una frequenza angolare ω costante attorno ad un'asse ortogonale al disco stesso e passante per il suo centro. Calcolare a) il campo magnetico in un punto generico del suo asse; b) il momento magnetico $\vec{m} = I\vec{S}$.
Soluzione a): $\vec{B} = \frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\left(\frac{2z^2+R^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2|z|\right)\hat{k}$
Soluzione b): $\vec{m} = \frac{1}{4}\pi\omega\sigma R^4\hat{k}$

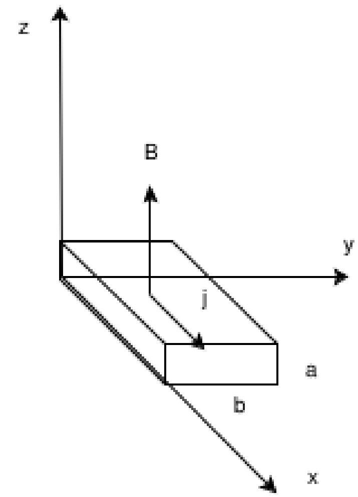
5.10 Considerare un piano infinito a $z = 0$ percorso da un corrente superficiale $\vec{j}_s = j_s\vec{i}$ uniforme. Calcolare il campo magnetico lungo l'asse y per $z > 0$.
Soluzione: $\vec{B} = -\frac{\mu_0 j_s}{2}\hat{\jmath}$

5.11 Una spira rettangolare rigida, di lati a e $b = 2a$, ha una massa per unità di lunghezza $\rho = 0.05$ g/cm. La spira è appesa lungo uno dei lati di lunghezza a, e può ruotare attorno allo stesso lato, posto in orizzontale (si veda la figura, l'asse y è diretto in verticale verso il basso). Nella spira circola una corrente $i = 10$ A in senso antiorario. La spira ruota verso il lettore a causa la presenza di un campo magnetico $B = 10^{-3}$ T, uniforme e parallello all'asse y. Calcolare l'angolo di equilibrio, l'energia e il lavoro compiuto dal campo sulla spira per produrre la rotazione.

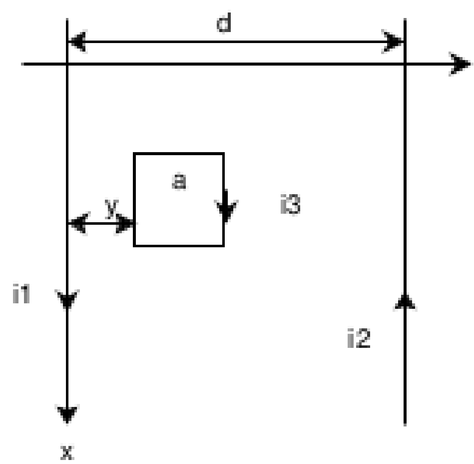


Soluzione: $\tan\alpha = \frac{iB}{g\rho}\frac{1}{1+b/a}$; $W = i\Phi = iBab\sin\alpha$; $L = iBab\sin\alpha$

5.12 Una sbarra metallica conduttrice, prismatica a sezione rettangolare (a, b) è percorsa da un corrente i ed è immersa in un campo magnetico uniforme B (vedere figura). Calcolare modulo e verso del campo elettrico traverso E_H, diretto secondo l'asse y, che compare nella sbarra. Il numero di elettroni di conduzione per unità di volume è n.

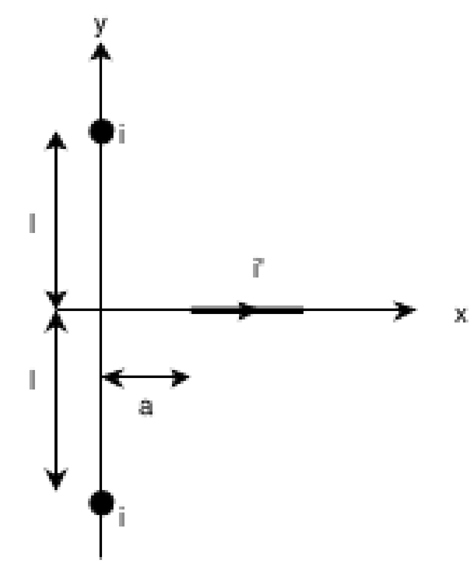


Soluzione: $\vec{E}_H = -\frac{iB}{enab}\hat{\jmath}$ dove e è il modulo della carica del elettrone. Questo effetto corrisponde al cosidetto *Effetto Hall trasverso*. Misurando la differenza di potenziale (lungo y) $\Delta V = E_H b$, l'intensità i e secondo il valore del campo B, si può determinare esperimentalmente la desnità di portatori di corente $n = \frac{iB}{e\Delta V a}$.



5.13 Due fili rettilinei indefiniti paralleli e distanti d sono percorsi in versi opposti dalle correnti i_1 e i_2. Tra i due fili e coplanare con essi si trova una spira quadrata, di lato a, percorsa dalla corrente i_3. Determinare le eventuali posizioni di equilibrio della spira per il caso in cui $i_2 = 2i_1$.

Soluzione: $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow y_{\text{eq.}} = \frac{1}{2}\left[-(a+2d) \pm \sqrt{a^2+8d^2}\right]$



5.14 Due fili indefiniti paralleli all'asse z, distanti $2l$, sono percorsi entrambi da una stessa corrente i concorde all'asse z. Un tratto di filo, lungo a, è posto sull'asse x ad una distanza a del piano che contiene i due fili ed è percorso da un corrente i' diretta verso $\hat{\imath}$. Calcolare in modulo, direzione e verso la forza F sul tratto di filo su l'asse x.

Soluzione: $\vec{F} = \frac{\mu_0 i i'}{2\pi} \ln\left(\frac{4a^2+l^2}{a^2+l^2}\right)\hat{k}$

5.15 Un cavo coassiale indefinito è costituito da un conduttore cilindrico rettilineo di raggio R_1, contenuto entro una guaina conduttrice cilidrica, coassiale al conduttore interno, di raggi R_2 ed R_3 con $R_2 < R_3$. Calcolare e fare il grafico del campo magnetico B in tutto lo spazio se il conduttore interno è percorso da una corrente i, nei casi a) la corrente è distribuita uniformemente su tutta la sezione del conduttore e b) la corrente è distribuita uniformemente sulla superficie del conduttore. Si assuma in entrambi i casi che la stessa corrente percorre in senso uguale e verso opposto la guaina, uniformemente distribuita sulla sezione di questa. Calcolare l'energia totale per unità di lunghezza e la pressione risentita dal conduttore esterno (assumendo $R_3 \to R_2$ per il calcolo della pressione).

Soluzione a): $B(r < R_1) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2}$; $B(R_1 < r < R_2) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$; $B(R_2 < r < R_3) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\frac{R_3^2-r^2}{R_3^2-R_2^2}$; $\frac{W_a}{L} = \frac{\mu_0 i^2}{16\pi} + \frac{W_b}{L}$

Soluzione b): $B(r < R_1) = 0$; $B(R_1 < r < R_2) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$; $B(R_2 < r < R_3) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\frac{R_3^2-r^2}{R_3^2-R_2^2}$; $\frac{W_b}{L} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\left\{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{R_3^4}{(R_3^2-R_2^2)^2}\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) - \frac{R_3^2}{R_3^2-R_2^2} + \frac{R_3^4-R_2^4}{4(R_3^2-R_2^2)^2}\right\}$

$P = \frac{B^2(r=R_2)}{\mu_0}$

5.16 Entro un conduttore cilindrico di raggio R è praticato un foro cilindrico parallelo all'asse, di raggio r. L'asse del foro dista dall'asse del conduttore d. Se il conduttore è percorso da una corrente di densità j, uniforme su tutta la sezione, dare l'espressione del campo magnetico lungo la congiungente i due centri e in particolare nel centro del foro.

Soluzione: $0 < y < d-r \to \vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 j\left(y + \frac{r^2}{d-y}\right)\hat{k}$
$d-r < y < d+r \to \vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 j d\hat{k}$
$d+r < y < R \to \vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 j\left(y + \frac{r^2}{d-y}\right)\hat{k}$
$y > R \to \vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 j\left(\frac{R^2}{y} + \frac{r^2}{d-y}\right)\hat{k}$

5.17 Una sfera conduttrice di raggio R, massa $\mathcal{M}$, carica q ruota con velocità angolare costante ω attorno ad un asse che passa per il suo centro. Calcolare il valore del campo magnetico nel centro, il momento magnetico e il rapporto tra il momento magnetico e il momento angolare, detto anche rapporto giromagnetico g della sfera.
Soluzione: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{6\pi}\frac{q\omega}{R}\hat{k}$; $\vec{m} = \frac{1}{3}q\omega R^2\hat{k}$; e $g = \frac{5}{3}\frac{q}{2\mathcal{M}}$