Elettromagnetismo: problemi

Prof. Marco Zaro
(basato sugli esercizi del Prof. X. Roca Maza)

2023-2024

4 Correnti continue e circuiti

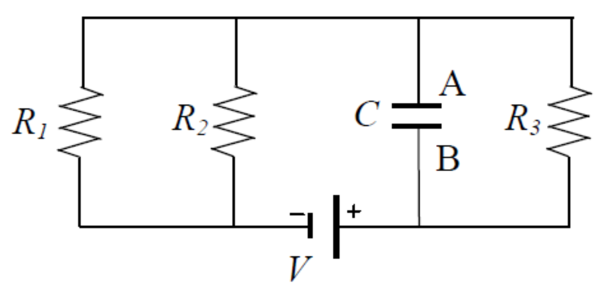
4.1 L'elemento riscaldante di una stufa elettrica, progettata per dissipare P_1 =1000 W [1] a V_1 =220 V, è costituito da una lunga spirale di filo con resistività $\rho = 10^{-6}\Omega$m e diametro $d = 4$ mm. Calcolare a) la potenza dissipata se la stufa viene alimentata a V_2 =110 V, e b) la lunghezza del filo.

Soluzione a): $P_2 = P_1 \frac{V_2^2}{V_1^2} = 250$ W ; **Soluzione b):** $L = \frac{\pi d^2}{4\rho}\frac{V_1^2}{P_1} = 608.2$ m

4.2 Calcolare a) la resistenza interna R_i [2] di una batteria d'automobile che ha una f.e.m nominale di V_0 =12 V sapendo che quando il motorino di avviamento assorbe I =50 A la d.d.p. ai suoi morsetti diminuisce al valore V =10.5 V; b) la resistenza del motorino, la potenza erogata dalla batteria e la potenza dissipata all'interno di essa in queste condizioni.

Soluzione a): $R_i = \frac{V_0 - V}{I} = 0.03\Omega$
Soluzione b): $R = \frac{V}{I} = 0.21\Omega$; $P_{\text{erogata}} = IV = 525$ W; $P_{\text{dissipata}} = I^2 R_i = 75$ W

4.3 Il circuito in figura si trova in condizioni stazionarie. Calcolare: a) La corrente che attraversa la resistenza R_1 e la potenza P dissipata in R_2; b) La carica Q depositata sul condensatore C. Dati: V = 20 V, R_1= 18 Ω, R_2 = 12 Ω, R_3 = 8 Ω, C = 14 pF.

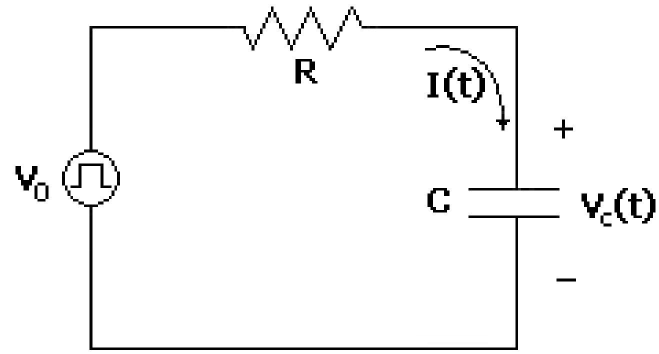


Soluzione a): $i_1 = \frac{VR_2}{R_3(R_1+R_2)+R_1R_2} = 0.53$ A; $P_2 = \frac{V^2R_2R_1^2}{[R_3(R_1+R_2)+R_1R_2]^2} = 7.5$ W
Soluzione b): $Q = \frac{CV}{1+\frac{R_1R_2}{R_3(R_1+R_2)}} = 147$ pC

[1] La variazione dell'energia per unità di tempo definisce la potenza P che ha come unità il Watt [W] = Joule [J]/ secondo [s]. Per una differenza di potenziale fissata, $dU = dqV$ e quindi $P = \frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt}V = iV$. Il prodotto iV è detto potenza trasferita. Nel caso specifico di un resistore caratterizzato da una resistenza R, dove si verifica la Legge di Ohm, $P = i^2R = \frac{V^2}{R}$. Quest'ultima relazione definisce invece la potenza resistiva.

[2] Una batteria scollegata ha un certo valore di f.e.m., detto tensione nominale. Una volta collegata, anche anche usando un filo conduttore di resistenza nulla, si osserva una caduta di potenziale ai suoi capi. Questa caduta di potenziale è dovuta alla resistenza interna della batteria. Pertanto si è soliti modellizzare una batteria reale come una batteria ideale con in serie una resistenza.

4.4 Consideriamo un circuito RC, cioè, un condensatore di capacità C collegato in serie ad una resistenza di valore R. I due elementi sono collegati ad una batteria che eroga una differenza di potenziale costante V_0. Il circuito può essere chiuso o aperto tramite un interruttore.



Si consideri prima la situazione appena dopo la chiusura dell'interruttore, supponendo che essa avvenga al tempo $t = 0$: il condensatore è inizialmente scarico e l'unico elemento a limitare la corrente nel circuito è la resistenza R: a) determinare intensità di corrente, differenza di potenziale tra le armature del condensatore e carica del condensatore in funzione del tempo. Il condensatore viene poi scaricato staccandolo dal circuito e chiudendolo sulla resistenza R (come in figura ma senza la batteria): b) determinare intensità, differenza di potenziale tra le armature del condensatore e carica del condensatore in funzione del tempo.

Soluzione a): $i(t) = \frac{V_0}{R}\exp(-t/RC)$, $V_c(t) = V_0\,[1 - \exp(-t/RC)]$, $Q(t) = CV_0\,[1 - \exp(-t/RC)]$
Soluzione b): $i(t) = -\frac{V_0}{R}\exp(-t/RC)$ nella scarica l'intensita di corrente va nel senso opposto a quello della carica, $V_c(t) = V_0\exp(-t/RC)$, $Q(t) = CV_0\exp(-t/RC)$

4.5 In un circuito RC come quello dell'esercizio precendente, calcolare il lavoro fatto dal generatore nel processo di carica (tra $t = 0$ e $t = +\infty$), l'energia dissipata per effetto Joule e quella immagazzinata sul condensatore. Dimostrare che il bilancio energetico è rispettato, e che la frazione di energia dissipata per effetto Joule non dipende dai valori specifici di resistenza e capacità del circuito.
Verificare che il bilancio energetico è soddisfatto anche a livello istantaneo (potenze), e calcolare per quale valore di t la frazione di potenza dissipata per effetto Joule è massima.
Infine, verificare che durante la scarica tutta l'energia immagazzinata nel condensatore viene dissipata per effetto Joule.
Soluzione: $L_{\text{gen}} = V_0^2 C$, $U_C = \frac{V_0^2 C}{2} = E_J$.
$P_{\text{gen}} = V_0 I(t)$, $P_C = \frac{Q(t)I(t)}{C}$ $P_J = RI(t)^2$. Il bilancio energetico è assicurato dall'equazione del circuito.
$\frac{P_J}{P_{\text{gen}}}$ è massima a $t = 0$, in cui si ha $P_C = 0$.

4.6 Calcolare la resistenza di un conduttore, avente resistività ρ, avente le seguenti caratteristiche:

a) Conduttore a forma di guscio cilindrico, di raggio interno a, raggio esterno b e lunghezza l, quando viene applicata una differenza di potenziale V_0 tra le superfici interna e esterna.
b) Conduttore a forma di guscio sferico di raggio interno a e raggio esterno b, quando viene applicata una differenza di potenziale V_0 tra le superfici interna e esterna.

In entrambi i casi, verificare che in un punto generico all'interno del conduttore vale la relazione $\vec{E} = \rho\vec{J}$.
Soluzione: a) $R = \frac{\rho}{2\pi l}\log\frac{b}{a}$; $\vec{E} = \frac{V_0}{r\log\frac{b}{a}}\hat{r}$. b) $R = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\frac{\rho}{4\pi}$; $\vec{E} = \frac{V_0}{r^2}\frac{ab}{b-a}\hat{r}$.