Elettromagnetismo: problemi

Prof. Marco Zaro
(basato sugli esercizi del Prof. X. Roca Maza)

2023-2024

3 Elettrostatica in presenza di materiali dielettrici

3.1 Una sfera di costante dielettrica relativa ε_r e raggio R ha una distribuzione volumica di carica ρ. La polarizzazione dentro della sfera è $\vec{P} = kr\hat{r}$. a) Determinare le densità di carica di polarizzazione; b) detrminare la densità volumica di carica ρ in funzione di k e ε_r; c) il potenziale dentro e fuori della sfera prendendo $V(r = \infty) = 0$.
Soluzione a): $\sigma_P = kR$ e $\rho_P = -3k$
Soluzione b): $\rho = \frac{3k\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}$
Soluzione c): $V(r \geq R) = \frac{k\varepsilon_r R^3}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)r}$ e $V(r \leq R) = \frac{k}{2\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}\left[(2\varepsilon_r + 1)R^2 - r^2\right]$

3.2 In un campo uniforme $\vec{E}_0$, s'introduce una lastra di costante dielettrica relativa ε_r. Determinare il campo elettrico all'interno ed all'esterno della lastra se a) è messa perpendicolare al campo e b) è messa parallela al campo.
Soluzione a): $\vec{E}_i = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$ e $\vec{E}_e = \vec{E}_0$
Soluzione b): $\vec{E}_e = \vec{E}_i = \vec{E}_0$

3.3 Determinare la capacità di un condensatore cilindrico di raggi R_a e R_b ($R_a < R_b$) e altezza h. Il condensatore è riempito di un materiale dielettrico la cui costante dielettrica è ε.
Soluzione: $C = \frac{2\pi\varepsilon h}{\ln(R_b/R_a)}$

3.4 Un condensatore piano di superficie S, distanza tra le armature d e capacità C_0 ha come dielettrico il vuoto. Esso viene caricato connettendolo a un generatore V_0 e poi isolandolo. Successivamente lo spazio tra le armature viene riempito con un dielettrico di costante dielettrica relativa ε_r. a) Determinare la variazione dello stato elettrico del sistema e b) ripetere il calcolo se invece il generatore resta sempre connesso.
Soluzione a): $V = \frac{V_0}{\varepsilon_r}$, $\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$, $\vec{P} = \varepsilon_0\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\vec{E}_0$, $\sigma_P = \frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\sigma_0$, $\vec{D} = \vec{D}_0$ e $U = \frac{U_0}{\varepsilon_r}$
Soluzione b): $Q = \varepsilon_r Q_0$, $\sigma = \varepsilon_r\sigma_0$, $\vec{E} = \vec{E}_0$, $\vec{D} = \varepsilon_r\vec{D}_0$, $\sigma_P = (1 - \varepsilon_r)\sigma_0$ e $U = \varepsilon_r U_0$

3.5 Un sistema costituito da due condensatori piani uguali, connessi in serie, ciascuno di capacità C, viene caricato connettendolo ad un generatore V_0 e poi isolato. Successivamente uno dei condensatori viene riempito completamente con una lastra dielettrica ε_r. Calcolare a) i valori della differenza di potenziale ai capi dei due condensatori alla fine, b) il lavoro fatto dalle froze del campo nel processo di riempimento, c) la carica di polarizzazione che compare sulle superficie della lastra.
Soluzione a): $V_1 = V_0\frac{\varepsilon_r + 1}{2\varepsilon_r}$
Soluzione b): $\mathcal{L} = \frac{1}{8}CV_0^2\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}$
Soluzione c): $Q_P = \sigma_P S = CV_0\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}$

3.6 Un condensatore piano ha le armature quadrate di lato l, distanti d, e viene caricato con un generatore V_0. Un blocco di dielettrico ε_r a forma di parallelepipedo con basi quadrate di lato l e altezza d può scorrere senza attrito tra le armature del condensatore. Calcolare, a carica costante e a potenziale costante, a) la forza che agisce sul blocco quando esso è entrato per una distanza x e b) il lavoro che tale forza compie per fare entrare completamente il blocco nel condensatore.
Soluzione a): $F_Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 l}\frac{\varepsilon_r - 1}{[x(\varepsilon_r-1)+l]^2}$ e $F_V = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 l}{d}(\varepsilon_r - 1)V_0^2$
Soluzione b): $\mathcal{L}_Q = -\Delta U = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 l^2}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}$ e $\mathcal{L}_V = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 l}{d}(\varepsilon_r - 1)V_0^2$

3.7 Lo spazio tra le armature di un condensatore piano con armature separate una distanza d è parzialmente riempito da un liquido ε_r di densità di massa ρ. Calcolare di quanto si alza il liquido se si collegano le armature a un generatore V_0
Soluzione: $x = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)V_0^2}{4\rho g d^2}$

3.8 Due condesnatori piani eguali di capacità C_0 quando hanno il vuoto come dielettrico, con armature quadrate di lato l e distanti d. Entrambi sono collegati in parallelo ad un generatore V_0. In uno dei condensatori viene inserita parzialmente un tratto x una lastra conduttrice di base l^2 e spessore $s < d$. Nell'altro condensatore viene inserita parzialmente un tratto y una lastra dielettrica di base l^2 e spessore d. Le forze con cui i condensatori attirano le lastre è eguale. Calcolare la suscettività del dielettrico, il lavoro fatto dal generatore per attirare entrambe le lastre, le cariche presenti sulle armature dei due condensatori quando le lastre sono completamente inserite e la polarizzazione del dielettrico nella stessa condizione.

Soluzione: $\chi = \frac{s}{d-s}$, $W_{gen} = \frac{\varepsilon_0 l^2 V_0}{d}\frac{s}{d-s}$, $Q_1 = Q_2 = \frac{\varepsilon_0 l^2}{d-s}V_0$ e $P = \varepsilon_0\frac{s}{d-s}\frac{V_0}{d}$

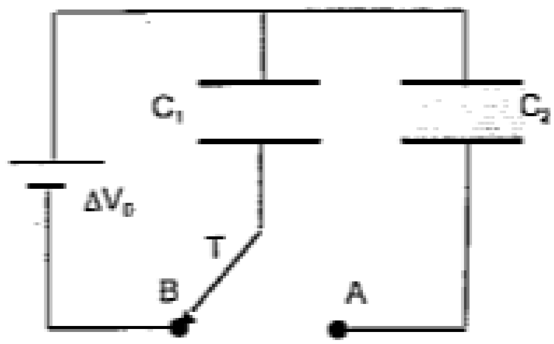
3.9 Un piccolo cilindro di materiale dielettrico è posto ad una distanza $l = 2R$ dal centro di una sfera conduttrice di raggio R. Le dimensioni del cilindro sono trascurabili rispetto a R e il suo volume è $\mathcal{V}$. Quando la sfera viene portata a V_0, la forza con cui il cilindro viene attratto è F. Calcolare la polarizzazione del cilindro e la costante relativa dielettrica.

Soluzione: $P = \frac{4R^2 F}{\mathcal{V}V_0}$ e $\varepsilon_r = \left(1 - \frac{4PR}{V_0\varepsilon_0}\right)^{-1}$

3.10 Lo spazio tra le armature di superfice S e distanti d di un condensatore piano viene riempito da un dielettrico non omogeneo la cui costante dielettrica relativa varia in modo lineare da ε_{r1} fino a ε_{r2} passando dall'armatura positiva a quella negativa. Calcolare la capacità del condensatore e le densità di carica di polarizzazione se ai capi del condensatore c'è una differenza di potenziale V_0.

Soluzione: $C = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1})}{d\ln(\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1})}$,
$\sigma_P(x=0) = -\frac{\varepsilon_{r1}-1}{\varepsilon_{r1}}\varepsilon_0\frac{\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1}}{d}V_0\frac{1}{\ln(\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1})}$
$\sigma_P(x=d) = \frac{\varepsilon_{r2}-1}{\varepsilon_{r2}}\varepsilon_0\frac{\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1}}{d}V_0\frac{1}{\ln(\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1})}$
$\rho_P = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{d^2}\frac{(\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1})^2}{\ln(\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1})}\frac{1}{\varepsilon_r^2(x)}$ dove $\varepsilon_r(x) = \varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1}}{d}x$
Nota: dielettrico neutro $\Rightarrow \int\sigma_P(x=0)dS + \int\sigma_P(x=d)dS + \int\rho_P dV = 0$

3.11 Due condensatori di capacità $C_1 = 10$ pF e $C_2 = 40$ pF, il primo vuoto e il secondo riempito completamente con un dielettrico di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4$, sono collegati come nel circuito in figura. Utilizzando un generatore che fornisce una d.d.p. $V_0 = 250$ V, si realizzano dei cicli nei quali l'interruttore T viene spostato dalla posizione A alla posizione B e viceversa, attendendo ogni volta un tempo sufficiente perchè la carica sui condensatori raggiunga il valore di equilibrio.

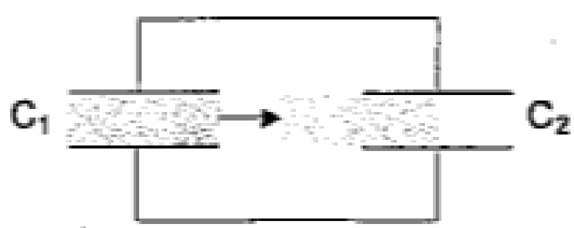


Determinare:

1. le cariche libere Q_1 e Q_2, la carica di polarizzazione Q_P, e le d.d.p. presenti sui due condensatori alla fine del primo ciclo (l'interruttore e' inizialmente in A con i condensatori entrambi scarichi, viene spostato in B e poi di nuovo in A).
2. l'energia immagazzinata nei condensatori alla fine del primo ciclo e il lavoro fatto dal generatore durante il primo ciclo.
3. i valori della carica e della d.d.p dei condensatori e il lavoro complessivo fatto dal generatore dopo un numero N motto grande di cicli ($N \to \infty$)

Soluzione 1: $Q_1 = \frac{C_1^2}{C_1+C_2} V_0 = 5 \times 10^{-10}$ C, $Q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2} V_0 = 20 \times 10^{-10}$ C, $Q_P = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2} V_0 = 15 \times 10^{-10}$ C e $V_1 = V_2 = \frac{C_1}{C_1+C_2} V_0 = 50V$
Soluzione 2: $U = \frac{1}{2} \frac{C_1^2}{C_1+C_2} V_0^2 = 6.25 \times 10^{-8}$ J e $W_{\text{gen}} = C_1 V_0^2 = 6.25 \times 10^{-7}$ J.
Soluzione 3: $Q_1 = C_1 V_0$, $Q_2 = C_2 V_0$, $V_1 = V_2 = V_0$ e $W_{\text{gen}} = (C_1 + C_2) V_0^2 = 3.125 \times 10^{-6}$ J

3.12 Un condensatore C_1, in cui è inserita una lastra di dielettrico con $\varepsilon_r = 4$ che ne riempie completamente lo spazio tra le armature, viene inizialmente caricato ad una d.d.p $V_0 = 250$ V. Viene poi staccato dal generatore e collegato come in figura ad un altro condensatore identico C_2 vuoto e inizialmente scarico. Entrambi i condensatori hanno armature quadrate di lato $a = 40$ cm a capacità a vuoto $C_0 = 100$ pF.



Ad equilibrio raggiunto, calcolare:

1. la carica libera sulle armature dei 2 condensatori, la carica di polarizzazione in C_1 e la d.d.p di ciascuno.

Se ad un certo istante si estrae la lastra di dielettrico da C_1 e la si inserisce in C_2 per metà della sua lunghezza, determinare:

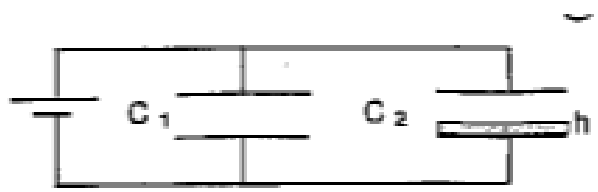
2. i nuovi valori delle cariche e delle d.d.p sui condensatori e la variazione di energia elettrostatica del sistema;
3. la forza F (direzione, verso e modulo) che agisce sulla lastra nella posizione finale. [**Nota**: il processo è a carica totale Q costante, quindi conviene scrivere $U(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$. Si uno vuole usare l'espressione $U = \frac{1}{2}CV^2$ si deve considerare la variazione di C e V al variare x. Quindi, usando $U(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(\varepsilon_r C_0 V_0)^2}{C_1+C_2(x)}$ dove $C_1 = C_0$, $C_2(x) = C_0(1 - x/a + \varepsilon_r x/a)$ e derivare questa estpressione di $U(x)$ per trovare la forza $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$]

Soluzione 1: $Q_1 = \frac{\varepsilon_r^2}{\varepsilon_r+1}C_0V_0 = 8 \times 10^{-8}$ C, $Q_2 = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}C_0V_0 = 2 \times 10^{-8}$ C, $Q_P = \frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\varepsilon_r C_0V_0 = 6 \times 10^{-8}$ C e $V_1 = V_2 = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}V_0 = 200$ V

Soluzione 2: $Q_1 = \frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r+3}C_0V_0 = 2.86 \times 10^{-8}$ C, $Q_2 = \frac{\varepsilon_r+1}{\varepsilon_r+3}\varepsilon_r C_0V_0 = 7.14 \times 10^{-8}$ C, $V_1 = V_2 = \frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r+3}V_0 = 285.7$ V e $\Delta U = \frac{1}{2}C_0V_0^2\varepsilon_r^2\frac{\varepsilon_r-1}{(\varepsilon_r+3)(\varepsilon_r+1)} = 4.29 \times 10^{-6}$ J

Soluzione 3: $\vec{F}(x = \frac{a}{2}) = 2C_0V_0^2\frac{\varepsilon_r^2(\varepsilon_r-1)}{a(\varepsilon_r+3)^2} = 3.06 \times 10^{-5}$ N. Dielettrico si muove verso destra, tende alla configurazione di minima energia dove il dielettrico occupa tutto lo spazio tra le armature.

3.13 Due condensatori piani C_1 e C_2 in parallelo sono collegati ad un generatore di f.e.m. $V_0 = 1200$ V. Le armature di ciascun condensatore hanno area $S = 20$ cm^2 e distano tra loco $d = 5$ mm. Tra le armature di C_1 c'è' il vuoto, mentre tra quelle di C_2, inizialmente vuoto, viene immesso del liquido dielettrico, di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 3.5$, facendone variare l'altezza h a velocità costante $dh/dt = 0.1$ mm/s.



Determinare:

1. la variazione della carica presente su C_2 tra quando a vuoto e quando è completamente riempito di dielettrico e la carica di polarizzazione finale;
2. la variazione della carica con il tempo (corrente elettrica) fornita dal generatore durante il riempimento calcolandone il valore per $h = d/2$;
3. la variazione di energia elettrostatica dei condensatori a riempimento completato e il lavoro totale fatto dal generatore.

Soluzione 1: $\Delta Q_2 = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_r-1)}{d}V_0 = 1.062 \times 10^{-8}$ C e $Q_P = \Delta Q_2$

Soluzione 2: $\frac{dQ}{dt} = \varepsilon_0\varepsilon_r SV_0\frac{\varepsilon_r-1}{[h+\varepsilon_r(d-h)]^2}\frac{dh}{dt}$, $\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{h=d/2} = 1.47 \times 10^{-10}$ C/s $\equiv$ A (Ampere)

Soluzione 3: $\Delta U = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)S}{d}V_0^2 = 6.37 \times 10^{-6}$ J, $W = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_r-1)}{d}V_0^2 = 1.27 \times 10^{-5}$ J

3.14 Un condensatore cilindrico isolato di raggi R_a e R_b ($R_a < R_b$), carica Q, e altezza $h >> R_b$ ha un materiale dielettrico lineare e omogeneo di permittività relativa ε_r tra le sue armature. Il campo elettrico massimo al quale può resistere il dielettrico senza iniziare a condurre è $E_m{}^*$. Determinare: a) la capacità del condensatore; b) l'energia immagazzinata in funzione del campo elettrico e il suo valore a campo elettrico massimo; e c) nella situazione in qui il campo elettrico è massimo, determinare il valore di R_a per il quale l'energia immagazinata è massima, determinare anche il valore dell'energia in questo caso.

[*Il fenomeno della rottura dielettrica si ha quando un materiale che in condizioni ordinarie è dielettrico cessa di essere isolante perchè sottoposto ad un campo elettrico sufficientemente elevato. In genere la rottura dielettrica è seguita da una scarica che percorre il materiale. Attraverso i gas si possono avere scariche in seguito a ionizzazione, come accade ad esempio nel caso dei fulmini o dei tubi al neon. **Esempio:** se consideriamo localmente il sistema nuvola-superficie della Terra come un condensatore piano $V = Ed$, la differenza di potenziale ai capi del fulmine dipendera dalla lunghezza d dello stesso e del campo di rottura dielettrica dell'aria (3×10^6 V/m). Quindi un fulmine lungo 3 km sarà generato da una differenza di potenziale attorno ai 9×10^9 V.]

Soluzione a): $C = \frac{2\pi h \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln(R_b/R_a)}$

Soluzione b): $U = \pi h \varepsilon_0 \varepsilon_r R_a^2 E_m^2 \ln(R_b/R_a)$

Soluzione c): $R_a = R_b \exp(-1/2)$; $U_{\max}(\ R_a = R_b \exp(-1/2)\ ) = \frac{1}{2}\pi h \varepsilon_0 \varepsilon_r R_b^2 E_m^2 \exp(-1)$

3.15 Due condensatori sferici sono costituiti da tre sfere di raggi $2a$, $3a$ e $6a$. La prima e l'ultima sfera sono collegate a terra ($V = 0$). Tra le armature del condensatore c'è un dielettrico di permittivita relativa ε_r e campo di rottura dielettrica E_m. Determinare: a) la capacità del condensatore equivalente; e b) la massima differenza di potenziale che si può applicare senza che inizii la rottura dielettrica.

Soluzione a): $C = 48\pi\varepsilon_0\varepsilon_r a$

Soluzione b): $V_{\max} = \frac{2}{3} a E_m$

Problemi supplementari

S.3.1 Un condensatore sferico con $R_1 < R_2$ ha l'intercapedine riempita da un dielettrico non omogeneo la cui costante dielettrica relativa varia secondo la legge $\varepsilon_r(r) = a/r$ con a una costante. Sulla sfera interna c'è la carica Q e l'armatura esterna è a potenziale zero. Calcolare il potenziale a una distanza $R_1 \leq R \leq R_2$ dal centro e determinare la densità delle cariche di polarizzazione.

Soluzione: $V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \ln(R_2/R_1)$, $\sigma_P(R_1) = -\left(1 - \frac{R_1}{a}\right) \frac{Q}{4\pi R_1^2}$, $\sigma_P(R_2) = \left(1 - \frac{R_2}{a}\right) \frac{Q}{4\pi R_2^2}$ e $\rho_P = \frac{Q}{4\pi r^2 a}$
Nota: dielettrico neutro $\Rightarrow \int \sigma_P(R_1) dS + \int \sigma_P(R_2) dS + \int \rho_P dV = 0$

S.3.2 Una sfera di raggio R e materiale dielettrico con ε_r è immersa in un campo elettrico uniforme $\vec{E}_0$. Calcolare il campo elettrico dentro della sfera e la densità delle cariche di polarizzazione.
Soluzione: $\vec{E} = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} \vec{E}_0$, $\sigma_P = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \vec{E}_0 \cdot \hat{r}$ e $\rho_P = 0$ (dielettrico lineale e omogeneo non essendoci cariche libere)

S.3.3 Il momento di dipolo $\vec{p}$ degli atomi o molecole di un dielettrico sottoposti ad un campo elettrico $\vec{E}$ si può approssimare per campi esterni non molto intensi $\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}$, dove α è la polarizzabilità del dielettrico. Inoltre, nei casi in qui il dielettrico eè un gas con ε_r molto vicino a 1, $\varepsilon_r - 1 = n\alpha$ dove n è il numero totale di dipoli per unita di volume, cioè, il numero di atomi o molecole che si sono polarizati per l'azione del campo elettrico esterno divisi per il volume occupato. Per un gas, $n = \frac{\text{N}^\text{o}\text{Avogadro}}{\text{Massa Molare}}\, \rho$ —esssendo ρ la densità del gas.
Supponendo che il nucleo di un atomo possa considerarsi come una carica puntiforme positiva Ze posta nel centro di una nube elettronica che occupa un volume sferico di raggio R e che ha carica $-Ze$, calcolare la polarizzabilità del atomo quando esso viene immerso in un campo elettrico uniforme. Assumendo ora un insieme di questi atomi che si trovanno in forma ti gas, determinare anche il raggio del atomo.
Soluzione: $\alpha = 4\pi R^3$ e $R = \frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi n}$. Nota: prendendo $\varepsilon_r(\text{He}) = 1.000074$, e considerando l'elio in condizioni normali il raggio del atomo deve venire dell'ordine del raggio di Bohr $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e c^2} =$

5.3×10^{-11} m dove $\hbar$ è la costante di Plank ridotta, m_e è la massa dell'elettrone e c è la velocità della luce.