Elettromagnetismo: problemi

Prof. Marco Zaro
(basato sugli esercizi del Prof. X. Roca Maza)

2023-2024

2 Conduttori e campo elettrostatico

2.1 Una sfera conduttrice, isolata e scarica, di raggio R viene immersa in un campo elettrico uniforme di modulo E_0; il potenziale vale V_0 nel punto coincidente col centro della sfera quando questa non c'è. Calcolare il potenziale della sfera, la desnità di di carica indotta e il campo elettrico sulla superficie. Ripetere il calcolo nel caso in qui la sfera, pur restando isolata, possieda una carica Q.
Soluzione $Q_{\text{TOT}} = 0$**:** $V(R) = V_0$, $\vec{E}(R) = 3E_0 \cos\theta \hat{r}$ e $\sigma(R) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$.
Soluzione $Q_{\text{TOT}} \neq 0$**:** $\sigma(R) = \frac{Q}{4\pi R^2} + 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$, $V(R) = V_0 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ e $\vec{E}(R) = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + 3E_0 \cos\theta\right)\hat{r}$.

2.2 Una carica puntiforme positiva q si trova a distanza x da un piano conduttore indefinito a potenziale costante $V = 0$. Calcolare la forza con cui la carica è attirata dal piano.
Soluzione: $\vec{F} = -\frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2}\hat{\imath}$

2.3 Una sfera condutrice di raggio R è scarica e mantenuta a $V = 0$. A una distanza d dal centro della sfera viene posta una carica puntiforme q. Calolare la forza di attrazione subita dalla carica q e la denistà di carica indotta sulla sfera.
Soluzione: $|\vec{F}| = \frac{q^2 R}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\frac{1}{\left(1-\frac{R^2}{d^2}\right)^2}$
$\sigma(R,\theta) = \frac{qR}{4\pi}\frac{1-\frac{d^2}{R^2}}{(R^2+d^2-2dR\cos\theta)^{3/2}}$

2.4 Nei problemi precedenti abbiamo utilizzato il metodo della carica immagine per risolvere problemi di elettrostatica in presenza di conduttori. Il conduttore del problema fisico veniva sostituito per una carica immaginaria, che replicava le condizioni al contorno originarie. Questo metodo si basa nell'unicità dell'equazione di Poisson $\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ che descrive le proprietà di un sistema elettrostatico. Dimostrare l'unicità dell'equazione di Poisson in una regione dello spazio Ω delimitata dalla superficie S.

Indicazione: Dimostrare per assurdo. Assumere due possibili soluzioni $V_1(\vec{r})$ e $V_2(\vec{r})$ che soddisfano la condizione al contorno con potenziale costante $V_1(\vec{r} = \vec{r}_S) \equiv V_S$ e $V_2(\vec{r} = \vec{r}_S) \equiv V_S$.

2.5 Data una sfera conduttrice carica con densità uniforme di carica σ calcolare la forza esercitata su un elemento di superfice dal resto del conduttore.
Soluzione: $d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS \hat{r} \Rightarrow \frac{d|\vec{F}|}{dS} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \equiv u_e$

2.6 Si hanno due sfere concentriche conduttrici. Sulla sfera esterna di raggio R_2, viene depositata una carica q_2 e su quella interna di raggio R_1 viene depositata una carica q_1. Subito dope le cariche sono depositate si produce l'induzione elettrostatica: a) calcolare il potenziale nella superficie della sfera esterna considerando $V(\infty) = 0$. Succesivamente si aggiunge sulla sfera esterna una carica $-q_2$: b) calcolare la diferenza tra i potenziali prima e dopo aver aggiunto la carica $-q_2$ sulla sfera esterna; e c) calcolare anche il potenziale sulla superficie della sfera interna.
Soluzione a): $V_a(R_2) = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$
Soluzione b): $V_b(R_2) - V_a(R_2) = -\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$
Soluzione c): $V_b(R_1) - V_a(R_1) = -\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

2.7 Due sfere conduttrici cariche, di raggio R_1 e R_2, sono poste a distanza x, molto maggiore dei raggi delle sfere. La prima sfera è isolata e ha una carica q_1, la seconda è mantenuta al potenziale V_2 rispetto al infinito. a) Calcolre il potenziale V_1, la carica q_2 e la forza tra le sfere; b) calcolare inoltre i coefficienti di potenziale $V_i = \sum_j b_{ij} q_j$, e quelli di capacità e induzione $q_i = \sum_j c_{ij} V_j$.

Soluzione a): $q_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 V_2 - q_1 \frac{R_2}{x}$

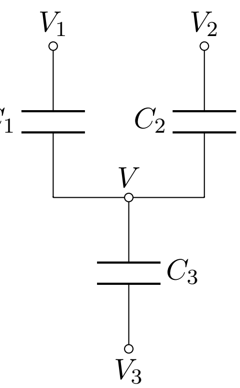
$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}\left(1 - \frac{R_1 R_2}{x^2}\right) + \frac{R_2 V_2}{x} \approx \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{R_2 V_2}{x}$

$\vec{F}_{12} = -\left(\frac{q_1 R_2 V_2}{x^2} - \frac{q_1^2 R_2}{4\pi\varepsilon_0 x^3}\right)\hat{\imath}$

Soluzione b): I coefficienti c_{ii} sono detti di capacità, c_{ij} d'induzione e i b_{ij} di potenziale. Essi dipendono esclusivamente della geometria del sistema e hanno le proprietà: $c_{ij} = c_{ji}$; $b_{ij} = b_{ji}$; $c_{ii} > 0$; $c_{ij} < 0$ e $b_{ii} \geq b_{ij} > 0$

$b_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$; $b_{12} = b_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 x}$; $b_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

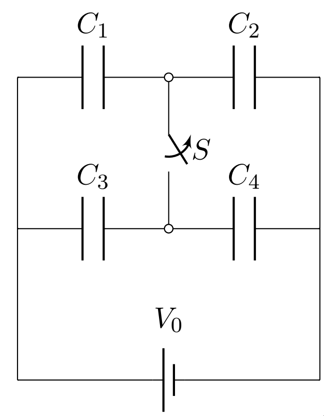
$c_{11} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1}{1-\frac{R_1 R_2}{x^2}}$; $c_{12} = c_{21} = -\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{x\left(1-\frac{R_1 R_2}{x^2}\right)}$; $c_{22} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2}{1-\frac{R_1 R_2}{x^2}}$



2.8 Nel sistema di condensatori in figura le armature sono connesse ai potenziali fissi $V_1 = 100$ V, $V_2 = 200$ V e $V_3 = 300$ V. Calcolare il potenziale V del conduttore centrale se $C_1 = 5\mu$F, $C_2 = 8\mu$F e $C_3 = 3\mu$F.

Soluzione:

$V = \frac{C_1V_1+C_2V_2+C_3V_3}{C_1+C_2+C_3} = 187.5$ V



2.9 Nel circuito in figura la batteria fornisce una d.d.p $V_0 = 12$ V. Le capacità dei condensatori sono $C_1 = 330$pF, $C_2 = 470$pF, $C_3 = 560$pF e $C_4 = 1000$pF. Determinare la carica di ciascun condensatore e l'energia elettrostatica del sistema a seconda che l'interruttore S sia aperto o chiuso. Nel caso in cui la capacità di uno dei condesatori sia molto grande e le altre uguali tra loro, dimostrare che $\frac{U_{\text{S aperto}}}{U_{\text{S chiuso}}} = \frac{3}{4}$.

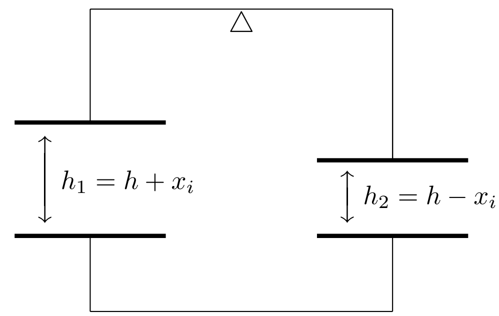
Soluzione interruttore aperto: $q_1 = q_2 = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}V_0 = 2.33$ nC; $q_3 = q_4 = \frac{C_3C_4}{C_3+C_4}V_0 = 4.31$ nC; $U = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2} + \frac{C_3C_4}{C_3+C_4}\right)V_0^2 = 39.8$nJ

Soluzione interruttore chiuso: $q_1 = \frac{C_1(C_2+C_4)}{C_1+C_2+C_3+C_4}V_0 = 2.466$ nC; $q_3 = \frac{C_3(C_2+C_4)}{C_1+C_2+C_3+C_4}V_0 = 4.185$ nC; $q_2 = \frac{C_2(C_1+C_3)}{C_1+C_2+C_3+C_4}V_0 = 2.126$ nC; $q_4 = \frac{C_4(C_1+C_3)}{C_1+C_2+C_3+C_4}V_0 = 4.525$ nC; $U = \frac{1}{2}\frac{(C_1+C_3)(C_2+C_4)}{C_1+C_2+C_3+C_4}V_0^2 = 39.9$nJ

2.10 In un condensatore piano con armature di superficie S e separate una distanza h, viene inserita una lastra conduttrice con la stessa superfice e spessore d. Calcolare di quanto varia la capacità del condensatore C e quanto lavoro il sistema compie durante l'inserimento della lastra, prima assumendo che la carica Q rimane costante e poi assumendo che la differenza di potenziale V tra le armature rimane costante.

Soluzione: $C = \frac{1}{1-d/h}\frac{\varepsilon_0 S}{h}$; $L_{Q=\text{cost}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}d$; $L_{V=\text{cost}} = \frac{1}{2}\frac{d/h}{1-d/h}\frac{\varepsilon_0 S}{h}V^2$ e si può comprovare che $L_{q=\text{cost}} = \frac{1}{1-d/h}L_{V=\text{cost}}$

2.11 Le armature superiori di due condensatori piani sono collegate insieme da un conduttore e costituiscono i piatti di una bilancia. L'area di ogni armatura è S e la distanza tra di loro è h. Si porta il sistema nella posizione x_1 (in cui le distanze tra le armature dei condensatori sono rispettivamente $h_1 = h + x_i$ e $h_2 = h - x_i$) e lo si carica con un potenziale V_i. Il generatore viene poi staccato e il sistema (isolato) lasciato libero di muoversi fino alla posizione x_f, dove viene arrestato.



In questa posizione calcolare la d.d.p. ai capi del sistema, le cariche Q_{1f} e Q_{2f} dei due condensatori, la risultante delle forze elettrostatiche sulle armature superiori (specificando quale è scesa), e il lavoro nel passaggio dalla posizione iniziale a quella finale.

Soluzione: $V_f = \frac{h^2-x_f^2}{h^2-x_i^2}V_i$; $Q_{1f} = \frac{1}{2}Q_i\,(1 - x_f/h)$ e $Q_{2f} = \frac{1}{2}Q_i\,(1 + x_f/h)$ dove $Q_{1i} + Q_{2i} \equiv Q_i = \frac{2\varepsilon_0 Sh}{h^2-x_i^2}V_i$; $\Delta F = 2\varepsilon_0 V_i^2 \frac{Shx_f}{(h^2-x_i^2)^2}$; $L = \varepsilon_0 V_i^2 \frac{Sh(x_f^2-x_i^2)}{(h^2-x_i^2)^2}$

2.12 Due condensatori piani hanno le armature con la stessa superficie S, le loro capacità sono $C_1 = 30$ pF e $C_2 = 100$ pF, e nel secondo condensatore le armature distano $d_2 = 9$ mm. I due condensatori vengono collegati in serie ad un generatore da $V = 100$ V come nella figura (1), poi vengono staccati dal generatore e collegati in parallelo come nella figura (2). a) Si determinino cariche e differenze di potenziale dei condensatori sulle armature quando sono collegati in serie al generatore; b) cariche e differenze di potenziale dei condensatori sulle armature quando il generatore è staccato e i condensatori sono collegati in parallelo, il valore dell'energia elettrostatica in tale situazione; c) se nel primo condensatore si vuole ora inserire tra le armature una sottile lastra di conduttore di spessore $d = 1$ mm [figura (3)], di quanto cambia l'energia elettrostatica del sistema? quanto lavoro viene compiuto dall'esterno?

figura (1)

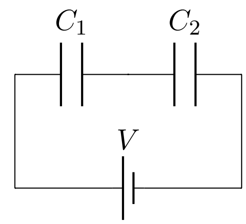


figura (2)

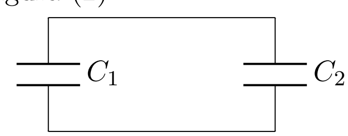
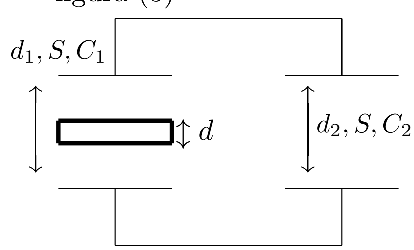


figura (3)



Soluzione a): $V_1 = \frac{C_2}{C_1+C_2}V = 25$ V; $V_2 = \frac{C_1}{C_1+C_2}V = 75$ V; $Q_1 = Q_2 \equiv Q = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}V = 750$ pC

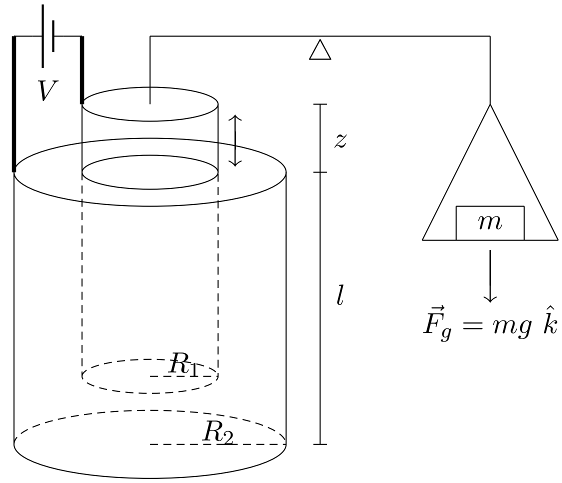
Soluzione b): $V_1' = V_2' \equiv V' = \frac{2C_1C_2}{(C_1+C_2)^2}V = 37.5$ V; $Q_1' = \frac{2C_1^2C_2}{(C_1+C_2)^2}V = 1125$ pC; $Q_2' = \frac{2C_1C_2^2}{(C_1+C_2)^2}V = 375$ pC; $U' = \frac{2C_1^2C_2^2}{(C_1+C_2)^3}V^2 = 28.12$ nJ

Soluzione c): $U'' = \frac{2C_1^2C_2^2}{(C_1+C_2)^2\left(\frac{d_2}{d_2-3d}C_1+C_2\right)}V^2 = 20.45$ nJ; $L = -(U''-U') = \frac{2C_1^3C_2^2\frac{3d}{d_2-3d}}{(C_1+C_2)^3\left(\frac{d_2}{d_2-3d}C_1+C_2\right)}V^2 = 7.67$ nJ

2.13 Determinare il potenziale in qualsiasi punto dello spazio tra le armature di un condensatore cilindrico di raggi R_a e R_b ($R_a < R_b$) e altezza h. Si ponga $V(R_b) = V_0$ e $V(R_a) = 0$. Determinare inoltre le densità di carica sulle armature in funzione dei dati del problema.

Soluzione: $V(r) = \frac{V_0}{\ln(R_b/R_a)}\ln(r/R_a)$; $\sigma_{R_a} = -\frac{V_0\varepsilon_0}{R_a\ln(R_b/R_a)}$; ; $\sigma_{R_b} = \frac{V_0\varepsilon_0}{R_b\ln(R_b/R_a)}$

2.14 Un elettrometro è uno strumento per misurare la differenza di potenziale. È formato da due cilindri conduttori concentrici di altezza l, raggi R_1 e R_2 con $R_2 > R_1$. Il cilindro interno è traslato in verticale di z rispetto a quello esterno, pertanto $h = l - z$ è la lunghezza in cui i cilindri sono sovrapposti.



Il cilindro interno viene collegato ad una bilancia, dove dall'altra parte si possono mettere dei pesi (vedere figura). Quando si applica una differenza di potenziale tra i due cilindri conduttori si può equilibrare il sistema aggiungendo una massa m. Determinare l'espressione di V in funzione di m, R_1 e R_2.
Soluzione: $V = \sqrt{\frac{mg \ln(R_2/R_1)}{\pi\varepsilon_0}}$

2.15 Una carica puntiforme positiva è posta a distanza x da un piano conduttore indefinito a potenziale $V = 0$. Calcolare l'energia elettrostatica della carica. Se questa parte con velocità nulla dalla posizione iniziale x con che enrgia cinetica arriva nella posizione $x/2$?
Soluzione: $U = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 x}$; $\Delta K = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 x}$

2.16 Calcolare l'energia elettrostatica di due dipoli coplanari di momenti $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ posti ad una distanza r. Studiare le gemoetrie più notevoli.
Soluzione

2.17 Le armature di un condensatore piano hanno superficie S e sono distanti z_0. Il condensatore è mantenuto ad una diffenza di potenziale V_0. Tra le armature, esiste una distribuzione volumica di carica negativa $\rho = -\rho_0 z/z_0$. Determinare il potenziale in qualsiasi punto dello spazio tra le armature del condensatore e la carica superficiale di carica di entrambe armature.
Soluzione: $V(z) = \frac{z}{z_0}\left[V_0 + \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(z^2 - z_0^2)\right]$; $\sigma_{\text{inf}} = \frac{\rho_0 z_0}{6} - \frac{V_0\varepsilon_0}{z_0}$; $\sigma_{\text{sup}} = \frac{\rho_0 z_0}{3} + \frac{V_0\varepsilon_0}{z_0}$

2.18 Due sfere metalliche e concentriche di raggi R_a e R_b ($R_a < R_b$) sono collegate (entrambe a terra) e nello spazio tra di loro esiste una distribuzione volumica di carica $\rho = \rho_0\left(1 + \frac{R_a^2}{r^2}\right)$. Calcolare la carica della sfera interna.
Soluzione: $Q_{R_a} = \frac{4}{3}\pi R_a^3 \rho_0 \left[4 + \frac{1}{2}\frac{R_b}{R_a} - \frac{1}{2}\left(\frac{R_b}{R_a}\right)^2 - \frac{\ln(R_b/R_a)}{1 - R_a/R_b}\right]$

Problemi supplementari

S.2.1 Dato un cilindro conduttore carico con densità uniforme σ calcolare la forza esercitata su un elemento di superfice dal resto del conduttore.
Soluzione: $d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS\hat{r} \Rightarrow \frac{d|\vec{F}|}{dS} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \equiv u_e$

S.2.2 Su una sfera conduttrice carica con densità σ di raggio R si appoggia un piccolo disco conduttore di raggio $\rho << R$ e massa 1g. Si scriva la relazione tra la densità di carica σ e il potenziale V a cui la sfera si trova. Supponendo di aumentare progressivamente il valore di tale potenziale, si calcoli a quale valore il disco inizierà ad sollevarsi.
Soluzione: $V \geq \frac{R}{\rho}\sqrt{\frac{2mg}{\pi\varepsilon_0}}$

S.2.3 Due sferette metalliche di raggio R sono isolate e hanno entrambe la stessa carica Q. Sono poste a una distanza $D = 50R$. Tra le due sferette si esercita una forza F. Successivamente, una delle due sferette è collegata a terra ($V = 0$). Calcolare la forza F' nella nuova configurazione.
Soluzione: $F' = -F/50$.

S.2.4 Determinare la capacità di un condensatore piano dove le armature hanno una superficie S e sono distanti una dall'altra una distanza d.
Soluzione: $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$.

S.2.5 Determinare la capacità di un condensatore sferico di raggi R_a e R_b ($R_a < R_b$).
Soluzione: $C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_a R_b}{R_b - R_a}$

S.2.6 Determinare la capacità di un condensatore cilindrico di raggi R_a e R_b ($R_a < R_b$) e altezza h.
Soluzione: $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln(R_b/R_a)}$