Elettromagnetismo: problemi

Prof. Marco Zaro
(basato sugli esercizi del Prof. X. Roca Maza)

2023-2024

1 Elettrostatica nel vuoto

1.1 Tre cariche q uguali e puntiformi sono situate nei vertici di un triangolo equilatero di lato l. Trovare il campo e potenziale elettrico a) a metà di uno dei lati del triangolo; e b) nel centro del triangolo.
Soluzione a): $\vec{E} = \frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l^2}\left(\sqrt{3}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\right)$ (sul lato obliquo destro, prendendo la base $\parallel \hat{\imath}$), $V = \frac{(4\sqrt{3}+2)q}{4\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 l}$.
Soluzione b): $\vec{E} = \vec{0}$, $V = \frac{3\sqrt{3}q}{4\pi\varepsilon_0 l}$.

1.2 Due fili indefiniti, paralleli e rettilinei, sono carichi con una densità λ, eguale in modulo per entrambi, ma di segno opposto, pari a 10^{-8} C/m. La distanza tra i due fili è $d = 5$ cm. Calcolare il campo elettrostatico E nel punto P, giacente nel piano ortogonale ai fili e distante $R_1 = 3$ cm dal filo positivo e $R_2 = 4$ cm da quello negativo. Calcolare inoltre la forza per unità di lunghezza con cui i due fili si attragono.
Soluzione: $\vec{E} = \left(7.2\hat{\imath} + 2.1\hat{\jmath}\right) \times 10^3$ N/C (o V/m) (i fili sono ortogonali e complanari all'asse x).
$\vec{F}_l \equiv \frac{dF_l}{dl} = -\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 d}\hat{\imath} = 3.6 \times 10^{-5}\hat{\imath}$ N/m.

1.3 Una carica è distribuita con densità uniforme σ su una superficie cilindrica di raggio R e altezza $2a$. Calcolare in un punto generico dell'asse: a) il campo elettrico; b) il potenziale; e c) il valore del campo per $a \to \infty$); d) calcolare il campo elettrico per z grandi e commentare l'andamento.
Soluzione a: $\vec{E}(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(z-a)^2+R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z+a)^2+R^2}}\right]\hat{k}$.
Soluzione b: $V(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z+a+\sqrt{(z+a)^2+R^2}}{z-a+\sqrt{(z-a)^2+R^2}}\right)$.
Soluzione c: $|\vec{E}(z; a \to \infty)| \to \frac{\sigma R z}{\varepsilon_0 a^2} \to 0$ (non solo lungo l'asse ma anche per $r < R$) e quindi $V =$ cost. all'interno del cilindro.
Soluzione d: Per $z \to \infty$, si ottiene un campo elettrico di una carica puntiforme corrispondente alla carica totale del cilindro, $Q = 4\pi Ra\sigma$.

1.4 a) Usando il Teorema di Gauss calcolare il campo elettrico dovuto ad una carica distribuita uniformemente λ su un filo molto lungo ($z \to \infty$) e b) calcolare la differenza di potenziale tra i punti $\vec{r}_1$ ed $\vec{r}_2$.
Soluzione a: $\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$
Soluzione b: $V(r_1) - V(r_2) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$

1.5 Calcolare in tutti i punti dello spazio il a) campo elettrico e b) il potenziale dovuti ad una carica distribuita uniformemente ρ dentro un cilindro di raggio R. Prendere l'origine di potenziale a $r = 0$.
Soluzione a: $\vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r}$ e $\vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r}$
Soluzione b: $V(r \leq R) = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}$ e $V(r \geq R) = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{r}{R}\right)\right]$

1.6 Una sfera di raggio $R = 3$ cm possiede una distribuzione di carica con densità volumetrica ρ avente simmetria sferica e un andamento in funzione della distanza r dal centro dato da $\rho(r) = \rho_0 \left[1 - \alpha \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$ con $\rho_0 = 8.85 \times 10^{-7}$ C/m^3: a) assumendo $\alpha = 1$ si calcoli il valore del potenziale al raggio R (prendere $V(\infty) = 0$); b) determinare il valore di α per il quale la carica totale è nulla. Con questo valore di α calcolare il valore massimo del campo E e la sua posizione radiale; e c) con il valore di α determinato al punto 2 calcolare il valore del potenziale al centro della sfera.
Soluzione a: $V(R) = \frac{2}{15} \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0}$
Soluzione b: $\alpha = \frac{5}{3}$, $E_{\mathrm{max}} = \frac{2}{9\sqrt{3}} \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}$ per $r = \frac{R}{\sqrt{3}}$
Soluzione c: $V(0) = \frac{\rho_0 R^2}{12\varepsilon_0}$

1.7 Calcolare il valore della forza d'interazione tra un dipolo elettrico con momento dipolare $\vec{p} = q\vec{l}$ e una carica puntiforme Q considerando che la carica giace sulla direzione del dipolo ed è situata ad una distanza $a \gg l$ del centro del dipolo.
Soluzione: $\vec{F} = \frac{pQ}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{r}$

1.8 Dimostrare che, posto un dipolo elettrico in un campo elettrico uniforme $\vec{E}_0$ parallelo e concorde al momento elettrico del dipolo, esiste nel campo risultante una superficie equipotenziale sferica con centro nel centro del dipolo. Calcolare il campo risultante nei punti di tale superficie.
Soluzione: Superficie equipotenziale sferica con raggio $R = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^{1/3}$ dove p è il momento dipolare. $\vec{E} = 3E_0 \cos\theta \hat{r}$

Problemi supplementari

S.1.1 Calcolare in tutti i punti dello spazio il a) campo elettrico e b) il potenziale dovuti ad una carica distribuita uniformemente σ su una superficie cilindrica molto lunga ($z \to \infty$) di raggio R. Prendete l'origine di potenziale a $r = 0$.
Soluzione a: $\vec{E}(r \leq R) = \vec{0}$ e $\vec{E}(r > R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\hat{r}$
Soluzione b: $V(r \leq R) = 0$ e $V(r \geq R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$

S.1.2 Calcolare in tutti i punti dello spazio il a) campo elettrico e b) il potenziale dovuti ad una carica distribuita uniformemente σ su una superficie sferica di raggio R. Prendete l'origine di potenziale a $r = \infty$.
Soluzione a: $\vec{E}(r \leq R) = \vec{0}$ e $\vec{E}(r > R) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$
Soluzione b: $V(r \leq R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$ e $V(r \geq R) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}$