



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE**

**TESI DI LAUREA TRIENNALE IN**  
**FISICA**

**Cosmologia di Killing conforme**

Autore:

**Michele Crosignani**

Numero di matricola:

**986986**

Relatore:

**Luca Guido Molinari**

Correlatore:

**Alberto Carlo Mantica**

Anno accademico:

**2023-2024**

# Indice

1	Abstract . . . . .	1
2	Teoria . . . . .	3
2.1	Notazioni adottate . . . . .	3
2.2	Nozioni di geometria differenziale . . . . .	4
	Varietà conformemente piatta . . . . .	4
	Vettori e tensori di Killing conforme . . . . .	4
	Decomposizione per un campo vettoriale normalizzato . . . . .	6
	Spaziotempi "generalized Robertson-Walker" e "Robertson-Walker" . . . . .	7
2.3	Gravità di Killing conforme . . . . .	11
	Introduzione . . . . .	11
	Ottenimento delle equazioni di campo . . . . .	11
	Soluzioni di vuoto . . . . .	14
	Cosmologia . . . . .	17
2.4	Confronto fra gravità di Cotton e gravità di Killing conforme . . . . .	24
3	Analisi del modello tramite dati sperimentali . . . . .	31
3.1	Misure del parametro di Hubble . . . . .	31
	Cronometri cosmici . . . . .	31
	Oscillazioni acustiche barioniche . . . . .	35
3.2	Fit dei parametri di densità . . . . .	42
	Parametri cosmologici . . . . .	44
	Equazione di stato dell'energia oscura . . . . .	50
	Commento . . . . .	52
	<b>Appendice</b> . . . . .	<b>53</b>
	Dimostrazione del teorema 2.19 . . . . .	54
	Misure di $H(z)$ . . . . .	56
	<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>57</b>

# 1 Abstract

L'elaborato vuole presentare la recente teoria: "gravità di Killing conforme" elaborata da Junpei Harada nel 2023. Si tratta di una teoria gravitazionale che può essere riformulata come l'ordinaria teoria di Einstein con un tensore geometrico aggiuntivo di tipo Killing conforme.

In questa tesi viene data particolare attenzione all'applicazione di questa teoria alla cosmologia. In questo ambito la teoria si prefigge di descrivere il "settore oscuro", attualmente descritto tramite la costante cosmologica.

Nella prima parte vi è quindi una descrizione della teoria. Inizialmente sono espone le motivazioni che hanno portato alle equazioni di campo che caratterizzano la gravità di Killing conforme. Vengono poi mostrate le soluzioni di questa equazione nel caso di uno spaziotempo a simmetria sferica e nel caso di varietà: *generalized Robertson-Walker* (con interesse maggiore per soluzioni in spaziotempi spazialmente omogenei e isotropi, caratteristici della cosmologia).

Nella seconda parte sono indagate le previsioni della teoria in ambito cosmologico attraverso l'utilizzo di un set di dati del parametro di Hubble, misurato a differenti redshift. Queste previsioni vengono poi comparate con quelle che si otterrebbero, a partire dallo stesso set di dati, attraverso le equazioni della relatività generale.



## 2 Teoria

### 2.1. Notazioni adottate

Nel seguente lavoro è stata adottata la convenzione di Einstein degli indici contratti, inoltre gli indici dei tensori sono lettere latine minuscole quando si riferiscono a componenti spaziotemporali, sono invece greche quando si riferiscono ad indici spaziali. Le varietà considerate saranno varietà Lorentziane di dimensione  $n$  con tensore metrico con segnatura "-" nella componente temporale e "+" negli indici spaziali. I risultati cercheranno di essere mantenuti i più generali possibili, anche se è evidente che il caso di maggiore interesse fisico è quello in cui  $n = 4$ .

Le parentesi quadre se delimitano alcuni indici di un tensore indicano che si considera l'antisimmetrizzazione di quel tensore rispetto a quegli indici. Le parentesi tonde indicano la simmetrizzazione. Per chiarezza si riporta il seguente esempio:

$$T_{[ab]c} := \frac{1}{2!}(T_{abc} - T_{bac})$$

Questa è la stessa convenzione presentata in [18].

In alcuni casi sarà più chiaro usare una notazione diversa in cui indicherò con  $\mathcal{S}$  l'operatore di simmetrizzazione, con  $\mathcal{A}$  quello di antisimmetrizzazione e sotto a questi gli indici su cui applico l'operatore, per esempio:  $\mathcal{S}_{a,b} T_{ab} := T_{(ab)}$ . Analogamente, ogni tanto userò, per chiarezza, la lettera  $\mathcal{C}$  con una notazione analoga per indicare la contrazione di una coppia di indici:

$$\mathcal{C}_{a,b} T_{ab} := T_c^c$$

Per un generico tensore  $T_{ab}$  a due indici indicherò la sua traccia con  $T( := T_c^c )$ .

Le unità di misura adottate sono le unità naturali in cui  $c = 1$  (dove  $c$  è la velocità della luce).

Le varietà verranno considerate con connessioni di Levi-Civita, ossia dotate delle proprietà:

$$\begin{cases} \nabla_a g_{bc} \equiv 0 \\ T_{bc}^a \equiv 0 \end{cases}$$

dove  $T_{bc}^a$  è il tensore della torsione.

Adotterò il simbolo  $\Lambda_0$  per fare riferimento allo spazio delle 0-forme.

## 2.2. Nozioni di geometria differenziale

### Varietà conformemente piatta

#### Definizione 2.1.

Sia  $\mathcal{M}$  una varietà Riemanniana (o Pseudo-Riemanniana) con tensore metrico  $g_{ab}$ . Essa si dice conformemente piatta se:

$\forall x \in \mathcal{M} \exists U_x$ , intorno di  $x$ , tale che  $\exists f$ , funzione liscia definita su  $U_x$ , per cui  $(U_x, e^{2f}g)$  è una sottovarietà piatta.

Questo equivale a richiedere che  $\forall U_x \exists \lambda$  tale che in  $U_x$   $g \equiv \lambda^2 \eta$  dove  $\lambda$  è una 0-forma e  $\eta$  è la metrica piatta.

Un'altra condizione necessaria e sufficiente per determinare se una varietà è conformemente piatta è data dal Teorema di Weyl-Schouten.

#### Teorema 2.1 (Weyl-Schouten).

In  $n \geq 4$ :

$$\mathcal{M} \text{ è conformemente piatta} \iff C_{abcd} \equiv 0 \quad (2.2.1)$$

Dove il tensore  $C_{abcd}$  è detto tensore di Weyl ed è definito come:

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{2}{n-2}(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) + \frac{2R}{(n-1)(n-2)}g_{a[c}g_{d]b} \quad (2.2.2)$$

### Vettori e tensori di Killing conforme

Una famiglia di vettori molto importante sono i vettori di Killing. I vettori di Killing sono estremamente importanti soprattutto per la loro interpretazione fisica. Questi vettori hanno infatti linee di campo all'interno delle quali la metrica è costante. Poiché la fisica del sistema è racchiusa nella metrica dello spaziotempo questi vettori corrispondono a generatori di simmetrie traslazionali e, in quanto tali, per il teorema di Noether, sono collegati a costanti del moto. Una famiglia più ampia rispetto a quella dei vettori di Killing sono i vettori di Killing conforme, essi sono definiti dall'equazione:

$$\nabla_{(a}v_{b)} = \Psi g_{ab} \quad (2.2.3)$$

Dove  $\Psi$  è una 0-forma ( $\Psi \in \Lambda_0$ ) detta fattore conforme (di  $v$ ).

Nel caso in cui il fattore conforme sia identicamente nullo allora il vettore è un vettore di Killing.

Mostrerò nel Teorema 2.2 che a partire dai vettori di Killing conforme è possibile creare dei tensori detti di Killing conforme.

#### Definizione 2.2.

Un tensore  $K_{ab}$  è detto di tipo Killing conforme se  $\exists \eta_a$  tale che:

$$\nabla_{(a}K_{bc)} = \eta_{(a}g_{bc)} \quad (2.2.4)$$

I tensori di Killing conforme hanno quindi un vettore  $\eta$  associato. Nel caso in cui questo sia il vettore identicamente nullo il tensore è un tensore di Killing. Guardando l'equazione (2.2.3) e ricordando che la simmetrizzazione e la derivata covariante sono lineari, si può notare che la combinazione lineare di vettori di Killing conformi è anch'essa un vettore di Killing conforme. Questo ha un fattore conforme pari alla combinazione lineare dei fattori conformi dei vettori che lo hanno generato. Allo stesso modo l'equazione (2.2.4) mostra che una combinazione lineare di tensori di Killing conformi è un tensore di Killing conforme con vettore associato pari alla combinazione lineare dei vettori associati ai tensori di partenza. Lo spazio dei vettori di Killing conformi e quello dei tensori di Killing conformi sono quindi spazi vettoriali (nella denotazione del termine associato all'ambito dell'algebra lineare).

**Teorema 2.2.**

Siano  $a_{IJ}$  delle costanti qualunque  $\forall I, J \in \{1, \dots, N\}$ , siano  $v^{(I)}$   $N$  vettori di Killing conformi con fattori conformi:  $\Psi^{(I)}$   
 $\implies Q_{ab} = \lambda g_{ab} + \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N a_{IJ} v^{(I)}_{(a} v^{(J)}_{b)}$  è un tensore di Killing conforme con vettore di Killing associato:  $q_a = \lambda_{,a} + \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N a_{IJ} [v^{(I)}_a \Psi^{(J)} + v^{(J)}_a \Psi^{(I)}]$ .

**Dimostrazione:**

Considero separatamente i termini:  $\lambda g_{ab}$  e  $v^{(I)}_{(a} v^{(J)}_{b)}$ .

Il primo termine si verifica facilmente essere un tensore di Killing conforme con vettore associato:  $\lambda_{,a}$ . Il secondo termine:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{a,b,c} \left\{ \nabla_a \left[ v^{(I)}_{(b} v^{(J)}_{c)} \right] \right\} &= \frac{1}{2} \left[ \nabla_{(a} v^{(I)}_{b} v^{(J)}_{c)} + v^{(I)}_{(b} \nabla_a v^{(J)}_{c)} + \nabla_{(a} v^{(I)}_{c} v^{(J)}_{b)} + v^{(I)}_{(c} \nabla_a v^{(J)}_{b)} \right] \\ &= \nabla_{(a} v^{(I)}_{b} v^{(J)}_{c)} + v^{(I)}_{(a} \nabla_b v^{(J)}_{c)} \\ &= \frac{2}{3!} \left[ \nabla_{(a} v^{(I)}_{b} v^{(J)}_{c)} + \nabla_{(a} v^{(I)}_{c} v^{(J)}_{b)} + \nabla_{(b} v^{(I)}_{c} v^{(J)}_{a)} + v^{(I)}_a \nabla_{(b} v^{(J)}_{c)} + v^{(I)}_b \nabla_{(a} v^{(J)}_{c)} + v^{(I)}_c \nabla_{(b} v^{(J)}_{a)} \right] \\ &= \frac{2}{3!} \left[ g_{ab} (\Psi^{(I)} v^{(J)}_c + v^{(I)}_c \Psi^{(J)}) + g_{ac} (\Psi^{(I)} v^{(J)}_b + v^{(I)}_b \Psi^{(J)}) + g_{bc} (\Psi^{(I)} v^{(J)}_a + v^{(I)}_a \Psi^{(J)}) \right] \\ &= g_{(ab} \left[ \Psi^{(I)} v^{(J)}_{c)} + v^{(I)}_{c)} \Psi^{(J)} \right] \end{aligned}$$

Usando la proprietà dello spazio vettoriale dei tensori di Killing conformi, enunciata subito prima di questo teorema, dimostro la tesi. □

La scelta:  $\lambda = -\frac{1}{n} \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N a_{IJ} v^{(I)}_c v^{(J)c}$  porta alla creazione di un tensore di Killing conforme con traccia nulla.

Un altro teorema sarà usato in questo lavoro:

**Teorema 2.3.**

Sia  $K_{ab}$  un tensore di Killing conforme tale che  $K_{ac}v^c = \lambda v_a$  con: 
$$\begin{cases} |v_c v^c| = 1 \\ v^c \nabla_c v_a = f v_a \end{cases} \quad (f \in \Lambda_0)$$

$\implies \exists \lambda \in \Lambda_0$  t.c  $\eta_a = \nabla_a \lambda$

Questo teorema in particolare verrà applicato usando il vettore  $u_a$  definito nel Teorema 2.6.

**Teorema 2.4.**

Sia  $K_{ab}$  un tensore di Killing conforme, allora:

$$\nabla_c K^c_b = 0 \iff \eta_b = \frac{1}{n+2} \nabla_b K \quad (2.2.5)$$

**Dimostrazione:**

La tesi si ottiene contraendo degli indici: "a" e "c" all'interno dell'equazione (2.2.4) e ricordando che la derivata covariante commuta con l'operazione di contrazione.  $\square$

**Decomposizione per un campo vettoriale normalizzato****Teorema 2.5.**

Considerando un campo vettoriale normalizzato di tipo tempo  $v^a$  vale la seguente decomposizione:

$$\nabla_a v_b = \frac{\theta}{n-1} h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} - v_a \dot{v}_b$$

con le definizioni:

$$\text{"scalare di espansione":} \quad \theta := \nabla_c v^c$$

$$\text{proiettore nel piano perpendicolare a } v^a: \quad h_{ab} := g_{ab} + v_a v_b$$

$$\text{"vorticità":} \quad \omega_{ab} := h^c_a h^d_b \nabla_{[c} v_{d]} = \nabla_{[a} v_{b]} + v_{[a} \dot{v}_{b]}$$

$$\text{"shear":} \quad \sigma_{ab} := h^c_a h^d_b \nabla_{(c} v_{d)} - \frac{\theta}{n-1} h_{ab} = \nabla_{(a} v_{b)} - \frac{\theta}{n-1} h_{ab} + v_{(a} \dot{v}_{b)} \quad (2.2.6)$$

$$(2.2.7)$$

$$(2.2.8)$$

$$(2.2.9)$$

Valgono le proprietà:

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba} \quad (2.2.10)$$

$$\sigma_{ab} = \sigma_{ba} \quad (2.2.11)$$

$$\omega_a^c v_c = 0 \quad (2.2.12)$$

$$\sigma = 0 \quad (2.2.13)$$

$$\sigma_a^c v_c = 0 \quad (2.2.14)$$

**Dimostrazione:**

Sia le proprietà che la decomposizione seguono dalle definizioni: (2.2.6), (2.2.7), (2.2.8), (2.2.9).  $\square$

**Spaziotempi "generalized Robertson-Walker" e "Robertson-Walker"****Definizione 2.3.**

Una varietà lorentziana si dice "generalized Robertson-Walker" (GRW) se la sua metrica assume la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) {}^*g_{\alpha\beta}(\vec{x}) dx^\alpha dx^\beta \quad (2.2.15)$$

Dove  ${}^*g_{\alpha\beta}$  è il tensore metrico della sottovarietà di tipo spazio e  $\vec{x}$  è il vettore delle coordinate spaziali.

Una metrica che assume questa forma è la metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (o semplicemente Robertson-Walker o RW) in cui  ${}^*g_{\alpha\beta}$  è a curvatura costante e  $n = 4$ . Questa metrica ha la seguente forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2) \right] \quad (2.2.16)$$

con  $k \in \{-1, 0, 1\}$ . L'importanza di questa metrica nell'ambito della cosmologia deriva dal fatto che essa rappresenta la metrica di uno spaziotempo spazialmente omogeneo e isotropo. Il principio cosmologico infatti afferma che, in buona approssimazione e su scale sufficientemente grandi, l'universo sia spazialmente isotropo e omogeneo. Questa è quindi la metrica da considerare, indipendentemente dalle equazioni di campo fornite dalla teoria indagata, al fine di fare previsioni cosmologiche.

Si può notare che in (2.2.15) lo scalare  $a(t)$  è definito a meno di una costante moltiplicativa che può essere assorbita all'interno di  ${}^*g_{\alpha\beta}$ . Questa ambiguità non è invece presente nella metrica (2.2.16) in cui  ${}^*g_{\alpha\beta}$  è fissata. Per entrambe le metriche è però ben definita la quantità:

$$H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (2.2.17)$$

In cosmologia questa grandezza è detta parametro di Hubble e svolge un ruolo cruciale in quanto può essere stimata sperimentalmente (queste misure verranno spiegate in dettaglio nella sezione: 3.1).

Molte proprietà delle varietà GRW sono note e questo permetterà di fare i calcoli agevolmente per lo studio della **Cosmologia di Killing Conforme** ottenendo al tempo stesso risultati validi non solo per spaziotempi con metrica (2.2.16). Per questo motivo riportiamo di seguito un elenco dei principali teoremi che caratterizzano le varietà GRW e che saranno usati successivamente in questo lavoro.

**Teorema 2.6.**

Sia  $\mathcal{M}$  una varietà lorentziana con  $n > 3$ .

$$\mathcal{M} \text{ è di tipo GRW} \iff \exists X^a \text{ t.c.:} \begin{cases} X^c X_c < 0 \\ \nabla_a X_b = \rho g_{ab} \end{cases} \quad (\rho \in \Lambda_0)$$

e in quel caso si definisce:  $u_a := \frac{X_a}{\sqrt{-X_c X^c}}$ . e valgono:

- $u^c u_c = -1$
- $\nabla_a u_b = H(g_{ab} + u_a u_b)$
- $R_{ac} X^c = \zeta X_a \quad (\iff R_{ac} u^c = \zeta u_a)$

Il vettore  $X^a$  è detto vettore di Chen.

L'ultima proprietà impone che  $u_a$  sia un autovettore di  $R_{ab}$  con autovalore  $\zeta \in \Lambda_0$ . Nel caso RW il vettore  $u_a$  corrisponde alla quadrivelocità degli osservatori isotropi. Nelle varietà GRW userò la seguente notazione: un punto sopra ad una grandezza generica (scalare, vettoriale o tensoriale) indica la sua derivata covariante lungo  $u$ . Per esempio:  $\dot{T}_{ab} := u^c \nabla_c T_{ab}$ . Nella base in cui la metrica ha forma (2.2.15) questa operazione corrisponde a derivare rispetto al tempo  $t$ , infatti quella base è quella del

sistema comovente in cui  $(u_a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

#### Definizione 2.4.

Un tensore  $T_{ab}$ , si dice di tipo fluido perfetto se ha la forma:

$$T_{ab} = A u_a u_b + B g_{ab} \quad (2.2.18)$$

con  $A, B \in \Lambda_0$ .

Per un tensore di questo tipo si verifica immediatamente che  $u^a$  è un autovettore con autovalore  $L = B - A$ . Contraendo l'equazione (2.2.18) si ottiene:  $T = nB - A$ . Mettendo insieme queste due equazioni si trova che un Tensore di tipo fluido perfetto è scrivibile come:

$$T_{ab} = \frac{1}{n-1} [(T - nL) u_a u_b + (T - L) g_{ab}] \quad (2.2.19)$$

In cosmologia, se si adotta la teoria della relatività generale, l'assunzione che l'universo sia spazialmente isotropo e omogeneo impone che il tensore di Energia-momento  $T_{ab}$  assuma la forma (2.2.18). Vale infatti:

$$T_{ab} = (p + \rho) u_a u_b + p g_{ab} \quad (2.2.20)$$

dove  $p = p(t)$  e  $\rho = \rho(t)$  sono, rispettivamente, pressione e densità di energia, nel sistema comovente agli osservatori isotropi.

Riporterò ora una serie di teoremi che verranno utilizzati successivamente in questo lavoro.

#### Teorema 2.7.

Sia  $\mathcal{M}$  una varietà lorentziana GRW.

$$\mathcal{M} \text{ è RW } \iff \mathcal{M} \text{ è conformemente piatta}$$

**Teorema 2.8.**

Sia  $\mathcal{M}$  una varietà lorentziana.

$\mathcal{M}$  è GRW  $\iff \exists K_{ab}$  tensore di Killing conforme di tipo fluido perfetto:  $K_{ab} = Au_a u_b + Bg_{ab}$   
con:  $A, B \in \Lambda_0$ ,  $A \neq 0$ ,  $u^c u_c = -1$ ,  $\nabla_{[a} u_{b]} = 0$

In quel caso valgono:

- $\eta_a = \nabla_a B + \dot{A}u_a$
- $\nabla_a u_b = \frac{\dot{A}}{2A}(u_a u_b + g_{ab})$
- $\nabla_a A = -\dot{A}u_a$

L'ultima condizione è equivalente a chiedere che  $A = A(t)$ .

**Teorema 2.9.**

Sia  $\mathcal{M}$  una varietà lorentziana.

$$\mathcal{M} \text{ è GRW } \iff \exists u_a \text{ t.c. } \begin{cases} u^c u_c = -1 \\ \sigma_{ab} = 0 \\ \omega_{ab} = 0 \\ \dot{u}_a = 0 \end{cases}$$

Questo teorema fa riferimento alle definizioni introdotte nel Teorema 2.5 usando il vettore di tipo tempo  $u^a$ .

Usando il teorema 2.6 è inoltre possibile calcolare lo scalare di espansione (definito dall'equazione (2.2.6)) di  $u^a$  per varietà GRW:

$$\theta := \nabla_c u^c = (n-1)H \quad (2.2.21)$$

**Teorema 2.10.**

Sia  $\mathcal{M}$  una varietà lorentziana GRW, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- a)  $C_{abcd}u^d = C_{abcd}X^d = 0$
- b)  $\nabla_d C_{abc}{}^d = 0$
- c)  $R_{ab} = Au_a u_b + Bg_{ab} = \frac{R-n\zeta}{n-1}u_a u_b + \frac{R-\zeta}{n-1}g_{ab}$
- d)  $*R_{\alpha\beta} = \frac{*R}{n-1}g_{\alpha\beta}$

(\* prima di una grandezza indica che questa è definita usando il tensore metrico  $*g_{\alpha\beta}$  che appare nell'equazione (2.2.15))

E in questi casi vale:  $\nabla_a \rho = \frac{A-B}{n-1}X_a$  ( $\rho$  e  $X^a$  sono definiti dal Teorema 2.6)

Uno spaziotempo per cui vale la condizione (c) viene detto di tipo fluido perfetto.

**Teorema 2.11.**

Sia  $\mathcal{M}$  una varietà lorentziana GRW con  $n=4$

$$\mathcal{M} \text{ è di tipo fluido perfetto } \iff \mathcal{M} \text{ è RW}$$

**Teorema 2.12.**

In una varietà Pseudo-Riemanniana di dimensione  $n$  se:

$$\exists (X^a) \text{ tale che: } \begin{cases} \nabla_a X_b = \rho g_{ab} \\ X^c X_c \neq 0 \end{cases}$$

Allora:

$$a) R_{ac} X^c = \zeta X_a$$

$$b) \zeta = -(n-1) \frac{X^c \nabla_c \rho}{X^k X_k}$$

$$c) \nabla_a \zeta = X_a f \quad (f \in \Lambda_0)$$

$$d) R_{abc}{}^k X_k = -\frac{2\zeta}{n-1} X_{[a} g_{b]c}$$

$$e) R_{ab} = \frac{n\zeta - R}{n-1} \frac{X_a X_b}{X^c X_c} - \frac{\zeta - R}{n-1} g_{ab} + (n-2) C_{cabd} \frac{X^c X^d}{X^k X_k}$$

$$f) \nabla_a \rho = -\frac{\zeta}{n-1} X_a$$

Le ipotesi di questo teorema sono soddisfatte nelle varietà GRW con  $n>3$ . Ciò ci è garantito dal Teorema 2.6.

**Teorema 2.13.**

Nella base in cui la metrica ha la forma (2.2.15):

$$a) \Gamma^0_{\alpha\beta} = a \dot{a} {}^* g_{\alpha\beta}$$

$$b) \Gamma^\alpha_{0\beta} = H \delta^\alpha_\beta$$

$$c) \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = {}^* \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$$

$$d) R_{00} = -\zeta$$

$$e) R_{0\alpha} = R_{\alpha 0} = 0$$

$$f) (X^a) = a(t) \partial_t$$

$$g) \zeta = (n-1) \frac{\ddot{a}}{a}$$

## 2.3. Gravità di Killing conforme

### Introduzione

La gravità di Killing conforme è una teoria pensata da Junpei Harada nel 2023 e introdotta attraverso l'articolo [9].

Questa non è stata la prima modifica alle equazioni di Einstein proposta da Harada, infatti già nel 2021 all'interno di [7] egli introdusse la gravità di Cotton.

Questa teoria e i suoi legami con la gravità di Killing conforme verranno discussi all'interno del capitolo 2.4.

La gravità di Killing conforme è stata pensata per uno spaziotempo di dimensione  $n = 4$ . Tuttavia ho ritenuto naturale la sua estensione per varietà lorentziane di dimensione  $n > 3$ . I calcoli da me svolti e le equazioni di campo, le quali verranno introdotte nella prossima sezione, sono quindi generalizzazioni dei risultati presentati negli articoli: [9], [10], [8], [13].

Qualora venga considerato il caso  $n = 4$ , quello di maggior rilievo fisico, ciò verrà chiaramente esplicitato.

### Ottenimento delle equazioni di campo

Nell'articolo [9] Harada propone tre criteri per classificare le teorie gravitazionali. Questi sono i seguenti:

1. La costante cosmologica  $\Lambda$  è ottenuta dalle equazioni di campo come costante di integrazione.
2. La conservazione della densità di energia-momento:  $\nabla_c T^c_a = 0$  è conseguenza delle equazioni di campo.
3. Una metrica conformemente piatta non è necessariamente soluzione di vuoto (ossia nel caso  $T_{ab} \equiv 0$ ).

Questi criteri sono visti da Harada come punti di forza delle teorie gravitazionali. Quando Harada scrisse l'articolo però nessuna teoria era in grado di soddisfare questi criteri e, per questo motivo, crea una equazione di campo che soddisfa tutti questi criteri. La teoria che nasce da quest'equazione prenderà successivamente il nome di "Gravità di Killing conforme".

Il problema della relatività generale è che fallisce nel soddisfare il criterio 1. Infatti la costante cosmologica deve essere messa esplicitamente all'interno delle equazioni di campo e non è ricavata da esse. Le equazioni di campo della relatività generale sono infatti:

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab} \quad (2.3.1)$$

Dove il tensore di Einstein  $G_{ab}$  è definito come:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab} \quad (2.3.2)$$

Per cercare di risolvere questo problema Einstein stesso introdusse anche un'altra teoria in cui i tensori posti ai due lati dell'equazione di campo hanno traccia nulla e viene

imposta la conservazione della densità di energia-momento. Le equazioni di campo di questa teoria sono:

$$\begin{cases} R_{ab} - \frac{R}{n}g_{ab} = 8\pi G \left( T_{ab} - \frac{T}{n}g_{ab} \right) \\ \nabla_c T^c_a = 0 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Queste sono dette equazioni di Einstein senza traccia e la teoria che le assume prende il nome di TFE.

Fare la derivata covariante della prima equazione in (2.3.3) porta ad ottenere:

$$\nabla_c R_{ab} - \frac{\nabla_c R}{n}g_{ab} = 8\pi G \left( \nabla_c T_{ab} - \frac{\nabla_c T}{n}g_{ab} \right)$$

Contraendo gli indici: "a" e "c", imponendo  $\nabla_c T^c_a = 0$  e ricordando l'identità di Bianchi contratta:

$$\nabla_c R^c_a = \frac{1}{2}\nabla_a R \quad (2.3.4)$$

si ottiene:

$$\nabla_b \left[ \frac{n-2}{2n}R + \frac{8\pi G}{n}T \right] = 0$$

che implica che  $\frac{n-2}{2n}R + \frac{8\pi G}{n}T := \Lambda$  è una costante.

Usando questo fatto all'interno della prima equazione del sistema (2.3.3) si ottiene:

$$R_{ab} - \frac{R}{2}g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab}.$$

In TFE la costante cosmologica è quindi determinata a partire dalle equazioni di campo e quindi TFE, a differenza della relatività generale, rispetta il criterio 1.

All'interno di TFE, tuttavia, la conservazione della densità di energia-momento è imposta invece che essere conseguenza delle equazioni di campo. Quindi questa teoria non rispetta il criterio 2.

Al contrario la relatività generale, pur non rispettando il criterio 1, rispetta il criterio 2. Infatti, facendo la derivata covariante di (2.3.1) e contraendo l'indice di questa con uno degli altri indici e usando (2.3.2) e (2.3.4), si ottiene  $\nabla_c T^c_a = 0$ .

Entrambi i criteri 1 e 2 sono rispettati da alcune teorie gravitazionali fra cui la gravità di Cotton, ideata dallo stesso Harada (si veda il capitolo 2.4). Queste teorie però falliscono nel rispettare il criterio 3.

Se il criterio 3 non viene rispettato si ha come conseguenza una teoria che contiene anche soluzioni non fisiche, infatti, per esempio, ogni metrica RW è conformemente piatta indipendentemente dalla funzione  $a(t)$  presente all'interno della metrica (2.2.16).

La relatività generale e TFE rispettano il criterio 3.

Per costruire l'equazione di campo Harada considera un'equazione della forma:

$$3a\nabla_{(a}R_{bc)} + 3bg_{(ab}\nabla_c)R = 3c\nabla_{(a}T_{bc)} + 3dg_{(ab}\nabla_c)T$$

Si può, senza perdere generalità, normalizzare l'equazione in modo che il primo termine abbia coefficiente unitario:

$$3\nabla_{(a}R_{bc)} + 3Bg_{(ab}\nabla_c)R = 3C\nabla_{(a}T_{bc)} + 3Dg_{(ab}\nabla_c)T$$

Contraendo gli indici: "a", "c" e usando (2.3.4) si ottiene:

$$[2 + B(n+2)]\nabla_b R = 2C\nabla_c T_b^c [C + D(n+2)]\nabla_b T$$

Imponendo il criterio 2, ossia chiedendo che l'equazione imponga:

$\nabla_c T^c_a = 0$  identicamente, si ottiene:

$$\begin{cases} B = -\frac{2}{n+2} \\ C = -(n+2)D \end{cases}$$

L'equazione diventa:

$$3 \left[ \nabla_{(a} R_{bc)} - \frac{2}{n+2} g_{(ab} \nabla_{c)} R \right] = 3D \left[ \nabla_{(a} T_{bc)} + g_{(ab} \nabla_{c)} T \right] \quad (2.3.5)$$

Poiché la relatività generale si è rivelata un'utile strumento che spiega moltissimi fenomeni, una buona teoria gravitazionale non può stravolgere la teoria per come è tuttora accettata. Per questo motivo Harada, nel ricavare le equazioni di campo, impone un ulteriore criterio: **Le soluzioni delle equazioni di campo della relatività generale devono essere soluzioni anche all'interno della nuova teoria.**

Questo criterio quindi impone che, assumendo valida l'equazione (2.3.1), ne consegua la validità dell'equazione (2.3.5).

Facendo la derivata covariante di (2.3.1) e inserendola, insieme alla sua contrazione, all'interno di (2.3.5) si trova che anche quest'ultima richiesta è soddisfatta se vale:

$D = -\frac{8\pi G}{n+2}$ . Con questa scelta uno spaziotempo che segue l'equazione (2.3.1) soddisfa anche (2.3.5) indipendentemente dal valore di  $\Lambda$  (e quindi anche se  $\Lambda = 0$ ). Questo significa che la teoria così creata non distingue la presenza della costante cosmologica all'interno di (2.3.1) dalla sua assenza. È quindi rispettato il criterio 1.

L'equazione di campo elaborata da Harada è quindi la seguente:

$$H_{abc} = 8\pi G T_{abc} \quad (2.3.6)$$

Con le definizioni:

$$H_{abc} := 3 \nabla_{(a} R_{bc)} - \frac{6}{n+2} g_{(ab} \nabla_{c)} R \quad (2.3.7)$$

$$T_{abc} := 3 \nabla_{(a} T_{bc)} - \frac{3}{n+2} g_{(ab} \nabla_{c)} T \quad (2.3.8)$$

Si possono evidenziare alcune proprietà di questi due tensori, le quali seguono immediatamente dalle definizioni: (2.3.7), (2.3.8).

- a)  $H_{abc}$  è un tensore totalmente simmetrico
- b)  $T_{abc}$  è un tensore totalmente simmetrico
- c)  $H^k_{ka} = H_a^k{}_k = H^k{}_{ak} = 0$
- d)  $T^k_{ka} = T_a^k{}_k = T^k{}_{ak} = 16\pi G \nabla_k T^k{}_a$

La proprietà: c) si dimostra sfruttando (2.3.4).

Il criterio 3 è rispettato da (2.3.6) in quanto:

$$C_{abcd} \equiv 0 \not\Rightarrow H_{abc} \equiv 0$$

(guardare il Teorema 2.1).

È importante notare che l'equazione di campo (2.3.6) è una equazione del terzo ordine rispetto al tensore metrico. In questo la teoria di Harada differisce dalla relatività generale in cui l'equazione di campo è del secondo ordine. Vogliamo adesso riscrivere l'equazione (2.3.6) in una forma più semplice e più familiare.

**Teorema 2.14.**

L'equazione di campo (2.3.6) è equivalente al sistema di equazioni:

$$\begin{cases} G_{ab} = 8\pi G(T_{ab} + K_{ab}) \\ \nabla_{(a}K_{bc)} = \eta_{(a}g_{bc)} \\ \eta_a = \frac{1}{n+2}\nabla_a K \end{cases} \quad (2.3.9)$$

**Dimostrazione:**

La contrazione dell'equazione (2.3.2) restituisce:

$$G = -\frac{n-2}{2}R \quad (2.3.10)$$

Si definisce il tensore:  $K_{ab} := \frac{G_{ab}}{8\pi G} - T_{ab}$ . Contraendo questa definizione e sfruttando (2.3.10) si ha:

$$T = -\frac{n-2}{16\pi G}R - K$$

Utilizzando queste informazioni e ricordando le definizioni: (2.3.7), (2.3.8) l'equazione (2.3.6) diviene:  $\nabla_{(a}K_{bc)} = \frac{1}{n+2}g_{(ab}\nabla_{c)}K$ .  $\square$

La seconda equazione del sistema altro non è se non la definizione di tensore di Killing conforme presentata nell'equazione (2.2.4). L'equazione di campo creata da Harada è quindi uguale alle equazioni di campo di Einstein, senza costante cosmologica, con un ulteriore termine che è un tensore di Killing conforme.

Per questo motivo all'interno dell'articolo [10] è stato dato il nome: "conformal Killing gravity" alla teoria gravitazionale creata da Harada. Da questo momento in poi userò quindi il nome di "gravità di Killing conforme" per riferirmi alla teoria di Harada e chiamerò con CKGE (Conformal Killing Gravity Equations) il sistema (2.3.9).

È opportuno notare che nel passare da (2.3.6) ad (2.3.9) si è passati da una equazione del terzo ordine a una del secondo ordine. Si può dire che (2.3.9) è ottenuta integrando l'equazione (2.3.6).

Si può notare che, per il Teorema 2.4, la seconda e terza equazione all'interno di (2.3.9) sono equivalenti a chiedere che il tensore di Killing  $K_{ab}$  abbia quadridivergenza nulla. Segue quindi dall'identità di Bianchi:  $\nabla_c G^c_a = 0$  e dalla prima equazione che  $\nabla_c T^c_a = 0$ , come previsto dal criterio 2.

## Soluzioni di vuoto

Le soluzioni di vuoto sono quelle soluzioni delle equazioni di campo con  $T_{ab} \equiv 0$ . Sono quindi le soluzioni per porzioni di spaziotempo in cui non è presente materia o energia.

**Teorema 2.15.**

Le soluzioni di vuoto delle CKGE hanno un tensore di Ricci di tipo Killing conforme con vettore associato:  $\frac{2}{n+2}\nabla_a R$ .

**Dimostrazione:**

Nel vuoto, dall'equazione (2.3.8), segue:

$$T_{ab} \equiv 0 \implies T_{abc} \equiv 0$$

Si consideri la forma delle CKGE: (2.3.6) che nel vuoto diviene  $H_{abc} \equiv 0$ . Ricordando la definizione (2.3.7) uno ricava la tesi:  $\nabla_{(a}R_{bc)} = \frac{2}{n+2}g_{(ab}\nabla_{c)}R$ .  $\square$

Tra tutte le soluzioni di vuoto in relatività generale quella più nota è quella di Schwarzschild. Questa è la soluzione statica a simmetria sferica delle equazioni di Einstein in uno spaziotempo con  $n = 4$ .

Vedremo adesso l'equivalente di questa metrica per spaziotempi che obbediscono alle CKGE.

Poichè questo lavoro è incentrato principalmente sullo studio della cosmologia non descriverò in modo rigoroso tutti i passaggi che hanno portato al risultato. Per chi è interessato ai passaggi intermedi si rimanda all'articolo originale [1].

Una soluzione di vuoto statica a simmetria sferica ha una metrica della forma:

$$ds^2 = -e^{2a} dt^2 + e^{2b} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2) \quad (2.3.11)$$

dove a e b sono funzioni di r.

Usando l'equazione  $H_{abc} \equiv 0$  alla metrica (2.3.11) si trovano due equazioni linearmente indipendenti. La prima di queste ha soluzione:

$$e^{2b} = \frac{e^{-2a}}{c + Dr^2} \quad (2.3.12)$$

Dove D e c sono costanti di integrazione.

Usando questa soluzione e definendo:  $y := e^{2a}$  la seconda equazione assume la forma:

$$(c + Dr^2)r^3 y''' - (2c - Dr^2)r^2 y'' - (2c + Dr^2)ry' + 8cy - 8 = 0 \quad (2.3.13)$$

È immediato verificare che l'equazione (2.3.13) è equivalente all'equazione

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{(Dr^2 + c)y'' + Dry' - 2c\frac{y}{r^2} + \frac{2}{r^2}}{2r^2} \right] = 0$$

la quale è vera se e solo se

$$(Dr^2 + c)y'' + Dry' - 2c\frac{y}{r^2} + \frac{2}{r^2} = 2\kappa r^2 \quad (2.3.14)$$

dove  $\kappa$  è una costante di integrazione. In questo modo si è passati da un'equazione differenziale del terzo ordine, ossia (2.3.13), ad una del secondo, ossia (2.3.14).

L'equazione (2.3.14) coincide con l'equazione (25) riportata all'interno di [12].

Se  $c \neq 0$  è possibile, tramite un cambio di base, riscalarlo il tempo in modo da porre  $c = 1$ . In questo caso la soluzione generale è:

$$\begin{cases} e^{2a} = 1 - \frac{2m}{r} \frac{p(r)}{r} - \frac{\hat{\Lambda}r^2}{3} + \lambda q(r)r^4 \\ e^{2b} = \frac{e^{-2a}}{(1+Dr^2)} = [(1+Dr^2)(1 - \frac{2m}{r} \frac{p(r)}{r} - \frac{\hat{\Lambda}r^2}{3} + \lambda q(r)r^4)]^{-1} \\ p(r) := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{(-1)} r^k \\ q(r) := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{(4)} r^k \end{cases} \quad (2.3.15)$$

Dove  $\hat{\Lambda}$ ,  $m$  e  $\lambda$  sono costanti di integrazione.  $a_k^{(4)}$  e  $a_k^{(-1)}$  sono:

$$a_k^{(4)} = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k=1 \\ -D \frac{k+2}{k+5} a_{k-2}^{(4)} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.3.16)$$

$$a_k^{(-1)} = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k=1 \\ -D \frac{k-3}{k} a_{k-2}^{(-1)} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.3.17)$$

Nel caso in cui  $\hat{\Lambda} = m = \lambda = 0$  la metrica è quella di Minkowski in coordinate sferiche. Se invece  $\hat{\Lambda} > 0$ ,  $m = \lambda = 0$  lo spaziotempo è quello di De Sitter.

È interessante il caso con  $D = 0$ . Se  $D = 0$  allora  $p(r) \equiv q(r) \equiv 1$  da cui segue:

$$\begin{cases} e^{2a} = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\hat{\Lambda}r^2}{3} + \lambda r^4 \\ e^{2b} = (1 - \frac{2m}{r} - \frac{\hat{\Lambda}r^2}{3} + \lambda r^4)^{-1} \end{cases} \quad (2.3.18)$$

Se si pone inoltre  $\lambda = 0$  all'interno di (2.3.18) e si identifica  $\hat{\Lambda}$  come la costante cosmologica, si ottiene l'universo di De Sitter-Schwarzschild. Questo è la soluzione statica a simmetria sferica di vuoto delle equazioni (2.3.1). Questo è coerente con il fatto che la teoria è stata costruita ponendo che le soluzioni di (2.3.1) fossero anche soluzioni delle CKGE. La teoria di Harada permette quindi di estendere la soluzione della relatività generale aggiungendo un termine  $\propto r^4$  alla metrica. L'influenza di questo termine diventa rilevante per grandi distanze.

Resta da analizzare un ultimo caso, quello in cui  $c=0$  all'interno di (2.3.12) e di (2.3.13). Tramite un riscaldamento del tempo si può porre  $D=1$ . La soluzione in questa base del sistema composto dalle equazioni (2.3.12) e (2.3.13) è:

$$\begin{cases} e^{2a} = -\frac{1}{2r^2} + \dot{\lambda} + \dot{m} \ln(r) - \frac{\dot{\Lambda}r^2}{3} \\ e^{2b} = \frac{e^{-2a}}{r^2} = \left[ -\frac{1}{2} + \dot{\lambda}r^2 + \dot{m}r^2 \ln(r) - \frac{\dot{\Lambda}r^4}{3} \right]^{-1} \end{cases} \quad (2.3.19)$$

Dove  $\dot{m}$ ,  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{\Lambda}$  sono costanti di integrazione.

Per la relatività generale vale un importantissimo teorema, il teorema di Birkhoff.

**Teorema 2.16** (Birkhoff).

Ogni soluzione delle equazioni di campo di Einstein nel vuoto con simmetria sferica è anche statica.

Nasce quindi spontaneo chiedersi se questo teorema valga anche per la gravità di Killing conforme. La risposta a questa domanda è no. Un controesempio viene presentato in [3], dove si mostrano esempi di metriche della forma (2.2.16) che sono soluzioni a simmetria sferica delle CKGE nel vuoto.

Scoprire esempi di violazioni del teorema di Birkhoff, all'interno di una teoria gravitazionale, è di grande importanza nell'ambito della fisica. Infatti ciò potrebbe portare alla predizione di oggetti astronomici a simmetria sferica, per esempio stelle, che collassano o pulsano emettendo onde gravitazionali. L'osservazione di queste onde rappresenterebbe un'evidenza a favore della suddetta teoria.

Altri tentativi di trovare violazioni del teorema di Birkhoff all'interno della gravità di Killing conforme sono stati fatti nell'articolo [2]. In questo articolo vengono considerate metriche della forma (2.3.11), ma considerando  $a = a(t, r)$  e  $b = b(t, r)$ . Nell'articolo non è stata rinvenuta alcuna metrica di questa forma che violasse il teorema di Birkhoff, anzi si è dimostrato che, sotto opportune ipotesi su  $a$  e  $b$ , le soluzioni delle CKGE sono statiche. I casi per cui è stato dimostrato che le metriche della forma sopramenzionata sono statiche sono i seguenti:

- $\frac{\partial b}{\partial t} = 0$
- $\frac{\partial a}{\partial t} = 0$
- $\frac{\partial a}{\partial r} = 0$
- $e^a$  e  $e^b$  sono funzioni separabili di  $t$  e  $r$  ( $e^a = f(r)g(t)$ ,  $e^b = \hat{f}(r)\hat{g}(t)$ ).
- $b = -(a + f(r))$

**Cosmologia**

Il principio cosmologico prevede l'assunzione che il nostro universo sia spazialmente isotropo e omogeneo. Questo impone la metrica RW, presentata nell'equazione (2.2.16). In questo capitolo tuttavia farò i calcoli usando la metrica GRW (2.2.15), considerando una varietà di dimensione  $n > 3$  con tensore di Killing conforme di tipo fluido perfetto. In cosmologia la relatività generale impone che le entità fisiche presenti in natura siano fluidi perfetti, il che significa che sono descritti dal tensore di energia-momento (2.2.20). Se nella gravità di Killing conforme si modellizzano allo stesso modo le fonti di energia, troviamo che il tensore  $K_{ab}$ , presente nelle equazioni di campo (2.3.9), è di tipo fluido perfetto se e solo se lo è il tensore  $G_{ab} := R_{ab} - \frac{R}{2}g_{ab}$ . Questo a sua volta è di tipo fluido perfetto se e solo se  $R_{ab}$  è un tensore di tipo fluido perfetto. Poiché stiamo indagando varietà di tipo GRW l'assunzione che  $K_{ab}$  sia di tipo fluido perfetto coincide quindi con l'imporre che valga una qualunque delle condizioni presenti nel Teorema 2.10. Le varietà così caratterizzate saranno quelle in cui verranno indagate le equazioni di campo.

L'esistenza di un tensore di Killing di tipo fluido perfetto nelle varietà di tipo GRW è

garantita dal Teorema 2.8.

Le soluzioni di una varietà spazialmente isotropa e omogenea di dimensione 4 (spaziotempi di tipo RW) saranno un sottogruppo di queste soluzioni, tuttavia se si fissa  $n = 4$  le soluzioni trovate saranno solo di tipo RW per via del Teorema 2.11.

Scrivo il tensore di Killing nella forma (2.2.19):

$$K_{ab} = \frac{1}{n-1} [(K - n\lambda)u_a u_b + (K - \lambda)g_{ab}] \quad (2.3.20)$$

Dove  $\lambda$  è l'autovalore di  $K_{ab}$  associato all'autovettore  $u^a$ .

Posso usare il Teorema 2.3 insieme alla terza equazione del sistema (2.3.9) per giungere all'equazione:  $\partial_a \lambda = \frac{1}{n+2} \partial_a K$  la cui soluzione è:

$$\lambda = \frac{K - 2\mathring{\Lambda}}{n+2} \quad (2.3.21)$$

$\mathring{\Lambda}$  è una costante di integrazione che è stata scelta con una convenzione tale per cui, come vedremo, vale:

$$\mathring{\Lambda} = (8\pi G)^{-1} \Lambda \quad (2.3.22)$$

con  $\Lambda$  che coincide con la costante cosmologica.

Sostituendo (2.3.21) all'interno di (2.3.20) si ottiene:

$$K_{ab} = \frac{1}{n-1} \left\{ 2(\lambda + \mathring{\Lambda})u_a u_b + [(n+1)\lambda + 2\mathring{\Lambda}]g_{ab} \right\} \quad (2.3.23)$$

Utilizzando la proprietà di  $K_{ab}$  garantita dal Teorema 2.8:

$$\nabla_a u_b = \frac{u^c \nabla_c \left[ \frac{2}{n-1} (\lambda + \mathring{\Lambda}) \right]}{2 \frac{2}{n-1} (\lambda + \mathring{\Lambda})} (u_a u_b + g_{ab})$$

insieme ad:  $\nabla_a u_b = H(u_a u_b + g_{ab})$  (Teorema 2.6), si ottiene:

$$H = \frac{\dot{\lambda}}{2(\lambda + \mathring{\Lambda})} \quad (2.3.24)$$

Ricordando la definizione (2.2.17) di  $H$  questa equazione diviene una equazione differenziale a variabili separabili con soluzione:

$$2(\lambda + \mathring{\Lambda}) = \mathring{C} a^2 \quad (2.3.25)$$

Dove  $\mathring{C}$  è una costante di integrazione ed  $a = a(t)$  è il fattore di scala che appare in (2.2.15).

Usando questa espressione in (2.3.23) e usando la definizione (2.3.22) si ottiene il tensore  $K_{ab}$  espresso in dipendenza soltanto di quantità cosmologiche e di una nuova costante di integrazione  $C := (8\pi G)^{-1} \mathring{C}$

$$K_{ab} = (8\pi G)^{-1} \left\{ \frac{Ca^2}{n-1} u_a u_b + \left[ \frac{(n+1)}{2(n-1)} Ca^2 - \Lambda \right] g_{ab} \right\} \quad (2.3.26)$$

Lo stesso risultato poteva essere trovato se, usando il Teorema 2.2, si costruiva il tensore  $K_{ab}$  a partire da un vettore di Killing conforme della forma:  $v_a = Fu_a$ .

Guardando questa formula per  $K_{ab}$  e ricordando le CKGE (2.3.9) si trova che la gravità di Killing conforme si riduce alla relatività generale, con equazione di campo (2.3.1), nel caso in cui  $C = 0$ . É quindi corretto identificare  $\Lambda$  come la costante cosmologica.

Poiché stiamo indagando spaziotempi di tipo fluido perfetto il tensore di Ricci ha la forma (equazione (c) del Teorema 2.10):

$$R_{ab} = \frac{1}{n-1} [(R - n\zeta)u_a u_b + (R - \zeta)g_{ab}] \quad (2.3.27)$$

dove:

$$R_{ac}u^c = \zeta u_a \quad (2.3.28)$$

La divergenza di questa equazione (ossia l'equazione ottenuta facendo la derivata covariante e poi contraendo), insieme all'identità di Bianchi contratta (2.3.4) ed alla formula (2.2.21) permette di ottenere:

$$\dot{R} - 2\dot{\zeta} = 2H(n\zeta - R) \quad (2.3.29)$$

L'equazione (g) del Teorema 2.13 può essere riscritta come:

$$\zeta = (n-1)(H^2 + \dot{H}) \quad (2.3.30)$$

Usando questa formula e ricordando che  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  è possibile riscrivere l'equazione (2.3.29) come:  $\frac{d}{dt} \{a^2 [R - 2\zeta - (n-2)(n-1)H^2]\} = 0$ .

La soluzione di questa equazione è chiaramente:  $R = \frac{f(\vec{x})}{a^2} + 2\zeta + (n-2)(n-1)H^2$

Da cui si può evincere che  $f(\vec{x}) = {}^*R$  e quindi

$$R = \frac{{}^*R}{a^2} + (n-1)[2\dot{H} + nH^2] \quad (2.3.31)$$

Per ottenere i risultati nel caso dello spaziotempo RW è necessario, oltre a imporre  $n = 4$ , ricordare che le varietà RW hanno sottovarietà spaziali a curvatura costante con  ${}^*R = 6k$ , dove  $k \in \{-1, 0, 1\}$ . Il parametro  $k$  ora menzionato è lo stesso che appare nella metrica (2.2.16).

La sostituzione di (2.3.31) all'interno di (2.3.27) porta ad ottenere:

$$R_{ab} = \left[ \frac{{}^*R}{(n-1)a^2} - (n-2)\dot{H} \right] u_a u_b + \left[ \frac{{}^*R}{(n-1)a^2} + \dot{H} + (n-1)H^2 \right] g_{ab} \quad (2.3.32)$$

Dall'equazione (2.3.32) e dalla definizione (2.3.2) segue:

$$G_{ab} = \left[ \frac{{}^*R}{(n-1)a^2} - (n-2)\dot{H} \right] u_a u_b + \left[ -\frac{(n-3){}^*R}{2(n-1)a^2} - (n-2)\dot{H} - \frac{(n-1)(n-2)}{2}H^2 \right] g_{ab} \quad (2.3.33)$$

Sottolineo come i risultati fin'ora ottenuti siano assolutamente generali e di natura solo geometrica in quanto non è stata ancora imposta alcuna equazione di campo.

Utilizzando la prima delle equazioni di campo (2.3.9) posso calcolare  $8\pi GT_{ab} = G_{ab} - 8\pi GK_{ab}$  sfruttando (2.3.33) ed (2.3.26). Le equazioni di campo della gravità di Killing conforme per una varietà GRW di tipo fluido perfetto hanno quindi la forma:

$$8\pi Gp = -\frac{(n-3)^*R}{2(n-1)a^2} - (n-2)\dot{H} - \frac{(n-2)(n-1)H^2}{2} - \frac{(n+1)}{2(n-1)}Ca^2 + \Lambda \quad (2.3.34)$$

$$8\pi G(p + \rho) = \frac{*R}{(n-1)a^2} - (n-2)\dot{H} - \frac{Ca^2}{n-1} \quad (2.3.35)$$

Dove è stata sfruttata l'equazione del tensore di energia-momento per un fluido perfetto (2.2.20).

Nel caso RW si ha  $n = 4$  ed  $*R = 6k$ , le equazioni in quel caso sono riscrivibili come:

$$8\pi G\rho = 3H^2 + \frac{3k}{a^2} - \Lambda + \frac{Ca^2}{2} \quad (2.3.36)$$

$$8\pi G(3p + \rho) = -6\frac{\ddot{a}}{a} + 2\Lambda - 2Ca^2 \quad (2.3.37)$$

Queste equazioni sono, nella gravità di Killing conforme, l'equivalente delle equazioni di Friedmann per la relatività generale. Le equazioni di Friedmann sono infatti ottenute ponendo  $C = 0$  all'interno di: (2.3.36), (2.3.37).

L'equazione (32) dell'articolo [9] si ottiene come la combinazione lineare di queste due equazioni che annulla il termine  $\propto a^2$ .

Le densità di energia presenti nell'universo devono rispettare l'equazione di continuità relativistica:

$$u^c \nabla_c \rho + \rho \nabla_c u^c + p \nabla_c u^c = 0 \quad (2.3.38)$$

e la legge di Navier-Stokes relativistica:

$$(p + \rho)u^c \nabla_c u^a + (g^{ac} + u^a u^c) \nabla_c p \quad (2.3.39)$$

Queste equazioni si ottengono proiettando  $\nabla_c T^c_a = 0$ , rispettivamente, lungo  $u^a$  e nel piano ad esso perpendicolare (contraendo l'equazione  $\nabla_c T^c_a = 0$  con un indice di:

$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$ ), considerato che:  $0 = \frac{1}{2}[\nabla_a(-1)] = \frac{1}{2}[\nabla_a(u^c u_c)] = u^c \nabla_a u_c$ .

Poiché stiamo considerando una varietà GRW valgono: (2.2.21) ed il Teorema 2.9. Le equazioni (2.3.38) ed (2.3.39) diventano quindi:

$$\dot{\rho} + (n-1)H(\rho + p) = 0 \quad (2.3.40)$$

$$\nabla_a p = -u_a \dot{p} \quad (2.3.41)$$

La seconda equazione è equivalente a  $p = p(t)$ . Considerando che  $p = p(t)$  l'equazione (2.3.34) evidenzia che  $*R$  non può essere funzione delle coordinate spaziali e deve quindi essere una costante. Ho così dimostrato:

**Teorema 2.17.**

Nella gravità di Killing conforme, se si considerano sorgenti di energia di tipo fluido perfetto, ogni soluzione di tipo GRW in cui vale una qualunque delle condizioni del Teorema 2.10 ha una sottovarietà spaziale a curvatura costante ( $*R = \text{cost}$ ).

L'equazione (2.3.35) impone inoltre  $\rho = \rho(t)$ . Queste equazioni sono valide anche in relatività generale per varietà GRW, infatti sono state ricavate senza usare le equazioni di campo.

Nasce poi l'esigenza di imporre un'equazione di stato:  $p = p(\rho)$  per le entità presenti nell'universo. In cosmologia questo viene fatto tramite una legge lineare:

$$p = w\rho \quad (2.3.42)$$

Per una sorgente di energia con equazione di stato (2.3.42) l'equazione (2.3.40) diviene una equazione differenziale a variabili separabili con soluzione:

$$\rho = \rho_{,0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-(n-1)(w+1)} \quad (2.3.43)$$

Dove uso il pedice "0" per indicare che la quantità è valutata in  $t = t_0$ .

Da questo momento in poi denoterò il tempo presente con  $t_0$  e porrò  $t = 0$  nel momento in cui è avvenuto il Big Bang.

Il fatto che il tensore di  $K_{ab}$  abbia la forma di fluido perfetto e abbia la proprietà:  $\nabla_c K^c_a = 0$  ci permette di considerarlo come se fosse un tensore energia momento con forma (2.2.20):

$$K_{ab} = (p_{\text{dark}} + \rho_{\text{dark}})u_a u_b + p_{\text{dark}} g_{ab} \quad (2.3.44)$$

È importante tenere a mente che, nonostante la scrittura dell'equazione (2.3.44), il tensore  $K_{ab}$  è di natura geometrica, ossia è legato a come la gravità stessa opera e non ad un'entità fisica realmente esistente. Questo fa sì, per esempio, che  $\rho_{\text{dark}}$  non sia necessariamente positivo.

Comparando (2.3.44) con (2.3.26) si ottiene che il tensore  $K_{ab}$  contribuisce alle equazioni: (2.3.34), (2.3.35) allo stesso modo in cui farebbero due entità fisiche con equazione di stato (2.3.42), dove:  $w_\Lambda = -1$ ,  $w_{\text{eff}} = -\frac{n+1}{n-1}$  e con densità:  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ ,  $\rho_{\text{eff}} = -\frac{Ca^2}{16\pi G}$ .

$$p_{\text{dark}} = p_{\text{eff}} + p_\Lambda = w_{\text{eff}} \cdot \rho_{\text{eff}} + w_\Lambda \cdot \rho_\Lambda = (8\pi G)^{-1} \left( \frac{n+1}{n-1} \frac{Ca^2}{2} - \Lambda \right) \quad (2.3.45)$$

$$\rho_{\text{dark}} = \rho_{\text{eff}} + \rho_\Lambda = (8\pi G)^{-1} \left( -\frac{Ca^2}{2} + \Lambda \right) \quad (2.3.46)$$

È opportuno notare che per ogni  $n$ :  $w_{\text{eff}} < 1$ . Una forma di energia per cui vale questa disuguaglianza è detta energia fantasma (*phantom energy*). Sorgenti di energia di questo tipo hanno la caratteristica che, nel caso abbiano  $\rho > 0$ , danno origini a singolarità future dette *Big Rip*. Queste singolarità sono caratterizzate dal fatto che esiste un tempo finito in cui  $a(t) \rightarrow +\infty$ .

Se consideriamo queste entità fittizie con densità  $\rho_\Lambda$ ,  $\rho_{\text{eff}}$  possiamo dimenticarci del

tensore di Killing conforme e considerare la teoria della relatività generale con costante cosmologica nulla. Le equazioni (2.3.34), (2.3.35) diventano:

$$8\pi G p = -\frac{(n-3)k}{a^2} - (n-2)\dot{H} - \frac{(n-2)(n-1)}{2}H^2 \quad (2.3.47)$$

$$8\pi G \rho = \frac{(n-1)k}{a^2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2}H^2 \quad (2.3.48)$$

Dove è stato fatto uso del Teorema 2.17, insieme al fatto che in (2.2.15)  $a(t)$  è definita a meno di una costante moltiplicativa, per porre  ${}^*R = 2(n-1)k$  con  $k \in \{-1, 0, 1\}$ . Nel caso  $n = 4$  questa definizione di  $k$  è in accordo con quella che appare in (2.2.16).

Considerare queste entità fittizie è utile per i calcoli in quanto ci permette di lavorare con le equazioni della relatività generale, le quali sono ben note. È tuttavia opportuno ricordare che la gravità di Killing conforme ci ha portato ad una rigorosa giustificazione teorica di questi termini aggiuntivi. La forza della teoria di Harada è quindi che essa non necessita di una giustificazione per l'esistenza di energia oscura, ma aggira il problema considerando questa come un effetto della gravità stessa.

Posso inoltre definire le quantità  $\Omega := \frac{2}{(n-1)(n-2)} \frac{8\pi G \rho}{H^2}$  ed  $\Omega_k := -\frac{2}{n-2} \frac{k}{(Ha)^2} = -\frac{2}{n-2} \frac{k}{a^2}$ . Queste definizioni coincidono con quelle standard della cosmologia se  $n = 4$ .

Tramite queste definizioni l'equazione (2.3.48) diviene la relazione:

$$\sum_I \Omega_I \equiv 1 \quad (2.3.49)$$

con:  $I \in \{\dots, \Lambda, \text{eff}, k\}$ , dove "..." indica gli indici associati alle fonti di energia fisicamente presenti nell'universo. Generalmente questi indici sono:  $m$  (materia) e  $r$  (radiazione), con coefficienti, rispettivamente:  $w_m = 0$  e  $w_r = \frac{1}{3}$ .

Per avere le stesse informazioni della coppia di equazioni: (2.3.47), (2.3.48) è necessario considerare, insieme ad (2.3.49), una combinazione lineare delle due equazioni menzionate. Considerandone la somma e sfruttando (2.3.43) si ottiene:

$$\dot{H} = -H_0^2 \left[ \sum_J (w_J + 1) \frac{n-1}{2} \Omega_{J,0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-(n-1)(w_J+1)} + \Omega_{k,0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} \right] \quad (2.3.50)$$

Dove  $J \in \{\dots, \Lambda, \text{eff}\}$ . Se si tiene a mente (2.2.17) e si considerano  $a$  e  $H$  come variabili, si risolve questa equazione con il metodo delle variabili separabili, trovando:

$$H^2 = H_0^2 \left[ \sum_J \Omega_{J,0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-(n-1)(w_J+1)} + \Omega_{k,0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} \right] \quad (2.3.51)$$

A partire da  $H(a)$ , ricordando la definizione (2.2.17), si può trovare il tempo in funzione del parametro di scala  $a$  tramite l'equazione

$$t = \int_0^a \frac{da'}{a' H(a')} \quad (2.3.52)$$

Se si considera un intervallo di tempo in cui l'universo risulta sempre in espansione ( $\dot{a} > 0$ ), allora l'equazione (2.3.51) all'interno di (2.3.52) permette di ottenere:

$$t = \frac{2}{n-2} \int_0^a \left[ \frac{8\pi G}{n-1} a_0^2 \sum_J \rho_{J,0} \left( \frac{a'}{a_0} \right)^{-(n-1)(w_J+1)+2} - k \right]^{-\frac{1}{2}} da' \quad (2.3.53)$$

Se l'universo si contrae a partire da un certo tempo  $t^*$  e si considerano i tempi  $t > t^*$  varrà invece:

$$t - t^* = \frac{2}{n-2} \int_a^{a(t^*)} \left[ \frac{8\pi G}{n-1} a_0^2 \sum_J \rho_{J,0} \left( \frac{a'}{a_0} \right)^{-(n-1)(w_J+1)+2} - k \right]^{-\frac{1}{2}} da' \quad (2.3.54)$$

Il parametro di decelerazione è una grandezza cosmologica definita come:

$$q := -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (2.3.55)$$

L'equazione si può riscrivere come:  $q = -\frac{\dot{H}}{H^2} - 1$ .

Utilizzando questa uguaglianza e (2.3.50) si ottiene:

$$q = \frac{n-1}{2} \sum_J (w_J + 1) \Omega_J + \Omega_k \quad (2.3.56)$$

Un'altra relazione utile si ottiene calcolando  $-\frac{\dot{H}}{H^2} - 1$  a partire da (2.3.51):

$$q = \frac{\sum_J \left[ \frac{n-1}{2} (w_J + 1) - 1 \right] \Omega_{J,0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-(n-1)(w_J+1)}}{\sum_J \Omega_{J,0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-(n-1)(w_J+1)} + \Omega_{k,0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-2}} \quad (2.3.57)$$

## 2.4. Confronto fra gravità di Cotton e gravità di Killing conforme

Come ho già accennato la gravità di Cotton è una teoria elaborata da Harada nel 2021, prima della teoria della gravità di Killing conforme. L'interesse nella descrizione di questa teoria all'interno di questo lavoro deriva dal fatto che, nel caso della cosmologia, esiste una relazione che collega le soluzioni delle equazioni di campo della gravità di Cotton con quelle della gravità di Killing conforme.

Per capire la teoria sono però necessarie alcune nozioni preliminari.

### Definizione 2.5.

In una varietà il tensore di Cotton è definito come:

$$C_{abc} := 2\nabla_{[a}S_{b]c} \quad (2.4.1)$$

Dove il tensore  $S_{ab}$  è detto tensore di Schouten ed è definito come:

$$S_{ab} := R_{ab} - \frac{R}{2(n-1)}g_{ab} \quad (2.4.2)$$

Usando quest'ultima definizione si ottiene:  $S = \frac{n-2}{2(n-1)}R$ , da cui segue la proprietà:  $G_{ab} = S_{ab} - Sg_{ab}$ .

Il tensore di Cotton ha un legame con il tensore di Weyl, definito in (2.2.2), secondo la legge:

$$\nabla_k C_{abc}{}^k = -\frac{n-3}{n-2}C_{abc} \quad (2.4.3)$$

Questa proprietà si dimostra usando (2.4.1), (2.4.2), (2.3.4) insieme alla seconda identità di Bianchi:  $\nabla_k R_{abc}{}^k = -2\nabla_{[a}R_{b]c}$ .

Un'altra utile proprietà del tensore di Cotton è:

$$C_{ak}{}^k \equiv 0 \quad (2.4.4)$$

Questo si dimostra facilmente contraendo "b" e "c" all'interno di (2.4.1) e ricordando (2.4.2), (2.3.4), insieme ad  $S = \frac{n-2}{2(n-1)}R$ .

Definito il tensore di Cotton ed enunciate alcune sue proprietà, si possono introdurre le equazioni di campo della gravità di Cotton:

$$C_{abc} = 8\pi G \left[ 2\nabla_{[a}T_{b]c} - \frac{2}{n-1}g_{c[b}\nabla_{a]}T \right] \quad (2.4.5)$$

Contraendo l'indice "a" con l'indice "c" di questa equazione e usando (2.4.4) si ottiene:  $\nabla_c T^c{}_a = 0$ . Ho così dimostrato che la gravità di Cotton soddisfa il criterio 2.

### Definizione 2.6.

Un tensore di tipo  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{E}_{ab}$ , si dice essere un tensore di Codazzi se valgono:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{ab} = \mathcal{E}_{ba} \\ \nabla_{[a}\mathcal{E}_{b]c} = 0 \end{cases} \quad (2.4.6)$$

L'equazione (2.4.5) può essere riscritta in termini di un tensore di Codazzi e in questo modo assume una forma più familiare.

**Teorema 2.18.**

Le equazioni di campo della gravità di Cotton (2.4.5) sono analoghe al sistema di equazioni:

$$\begin{cases} G_{ab} = 8\pi G(T_{ab} + \hat{H}_{ab}) \\ \hat{H}_{ab} = \mathcal{C}_{ab} - \mathcal{C}g_{ab} \\ \nabla_{[a}\mathcal{C}_{b]c} = 0 \end{cases} \quad (2.4.7)$$

**Dimostrazione:**

Si definisce

$$\mathcal{C}_{ab} := (8\pi G)^{-1}R_{ab} - T_{ab} - \frac{(8\pi G)^{-1}R - 2T}{2(n-1)}g_{ab} \quad (2.4.8)$$

Se con questa definizione si considera l'equazione (2.4.1) insieme alla (2.4.2), si ottiene che (2.4.5) è riscrivibile come  $\nabla_{[a}\mathcal{C}_{b]c} = 0$ .

La contrazione di (2.4.8) permette di trovare:  $\mathcal{C} = \frac{R}{16\pi G} + \frac{-R(8\pi G)^{-1} + 2T}{2(n-1)}$ . Usando questo fatto all'interno di (2.4.8) si trova:  $G_{ab} = 8\pi G(T_{ab} + \mathcal{C}_{ab} - \mathcal{C}g_{ab})$   $\square$

Essendo  $T_{ab}$  e  $G_{ab}$  tensori simmetrici le prime due equazioni di (2.4.7) implicano  $\mathcal{C}_{ab} = \mathcal{C}_{ba}$ . Considerando anche la terza equazione quindi si richiede che  $\mathcal{C}_{ab}$  sia un tensore di Codazzi. Le equazioni della gravità di Cotton sono quindi le equazioni della relatività generale (senza costante cosmologica) in cui viene aggiunto a  $T_{ab}$  il termine  $\mathcal{C}_{ab} - \mathcal{C}g_{ab}$ , dove  $\mathcal{C}_{ab}$  è un tensore di Codazzi arbitrario.

La formulazione (2.4.7) delle equazioni di campo prende il nome di parametrizzazione di Codazzi.

È evidente che:  $(8\pi G)^{-1}\frac{\Lambda}{n-1}g_{ab}$  è un tensore di Codazzi indipendentemente dal valore di  $\Lambda = \text{cost}$ . La scelta  $\mathcal{C}_{ab} = (8\pi G)^{-1}\frac{\Lambda}{n-1}g_{ab}$  fa sì che le equazioni di campo della gravità di Cotton (2.4.7) diventino l'equazione (2.3.1). Le soluzioni della relatività generale sono quindi soluzioni particolari della gravità di Cotton nel caso in cui  $\mathcal{C}_{ab} = (8\pi G)^{-1}\frac{\Lambda}{n-1}g_{ab}$ . L'arbitrarietà del valore di  $\Lambda$  dimostra inoltre che la gravità di Cotton soddisfa il criterio 1.

Se consideriamo l'equazione (2.4.5) si vede che nel vuoto le soluzioni della gravità di Cotton devono seguire l'equazione:  $C_{abc} = 0$ , ma per via della formula (2.4.3) questo coincide con la richiesta  $\nabla_k C_{abc}^k = 0$ . Una varietà conformemente piatta è quindi una soluzione di vuoto della gravità di Cotton. Non è quindi rispettato il criterio 3. Questo è stato il motivo per cui Harada decise nel 2023, all'interno dell'articolo [9], di introdurre la teoria della gravità di Killing conforme.

Come abbiamo commentato le equazioni della gravità di Cotton implicano  $\nabla_c T^c_a = 0$ . Come conseguenza di ciò e dell'identità di Bianchi anche il tensore  $\hat{H}_{ab}$ , definito in (2.4.7), ha divergenza nulla:  $\nabla_c \hat{H}^c_a = 0$ .

Applichiamo adesso le equazioni della gravità di Cotton alla cosmologia.

Se si modellizzano le fonti di energia come fluidi perfetti e si considerano varietà GRW di tipo fluido perfetto, come abbiamo fatto per la gravità di Killing conforme, abbiamo

come conseguenza di (2.4.7) che anche  $\hat{H}_{ab}$  e  $\mathcal{C}_{ab}$  sono di tipo fluido perfetto. Avremo quindi:  $\hat{H}_{ab} = Au_a u_b + Bg_{ab}$ ,  $\mathcal{C}_{ab} = \mathcal{A}u_a u_b + \mathcal{B}g_{ab}$  con  $A, B, \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Lambda_0$ .  
Dalla seconda equazione del sistema (2.4.7) trovo inoltre le relazioni:

$$\mathcal{A} = A \quad (2.4.9)$$

$$\mathcal{B} = \frac{A - B}{n - 1} \quad (2.4.10)$$

**Teorema 2.19.**

In  $n > 2$  siano  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Lambda_0$  con  $\mathcal{A} \neq 0$  e sia  $\mathcal{C}_{ab}$  tale che: 
$$\begin{cases} \mathcal{C}_{ab} = \mathcal{A}u_a u_b + \mathcal{B}g_{ab} \\ u^k u_k = -1 \end{cases}$$

Allora:

$$\mathcal{C}_{ab} \text{ è un tensore di Codazzi} \iff \begin{cases} \nabla_a u_b = \varphi(g_{ab} + u_a u_b) - u_a \dot{u}_b \\ \nabla_a \mathcal{A} = -u_a \dot{\mathcal{A}} - \dot{u}_a \mathcal{A} \\ \nabla_a \mathcal{B} = -u_a \dot{\mathcal{B}} \\ \varphi = -\frac{\dot{\mathcal{B}}}{\mathcal{A}} \end{cases}$$

E valgono le seguenti proprietà:

- a)  $\omega_{ab} \equiv 0$
- b)  $\sigma_{ab} \equiv 0$
- c)  $\nabla_a \varphi = -u_a \dot{\varphi}$
- d)  $\varphi = \frac{\theta}{n-1}$

Le grandezze apparse in questo teorema sono le stesse introdotte nel Teorema 2.5.

La dimostrazione del teorema è riportata all'interno dell'Appendice A.

Possiamo applicare il Teorema 2.19 per una varietà GRW, dove:  $\dot{u}_a \equiv 0$  e  $\theta = (n - 1)H$ , come conseguenza, rispettivamente, del Teorema 2.9 e dell'equazione (2.2.21). Ne consegue che, utilizzando la proprietà d), il sistema al lato destro della doppia implicazione si riduce a:

$$\begin{cases} \nabla_a u_b = H(g_{ab} + u_a u_b) \\ \nabla_a \mathcal{A} = -u_a \dot{\mathcal{A}} \\ \nabla_a \mathcal{B} = -u_a \dot{\mathcal{B}} \\ H = -\frac{\dot{\mathcal{B}}}{\mathcal{A}} \end{cases}$$

Ricordo che in GRW la proprietà  $\nabla_a u_b = H(g_{ab} + u_a u_b)$  è garantita dal Teorema 2.6 e che, nella base in cui la metrica assume la forma (2.2.15),  $\nabla_a \mathcal{A} = -u_a \dot{\mathcal{A}}$  è equivalente a:  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ . Vale quindi:

**Corollario 2.19.1.**

In una varietà GRW la condizione necessaria e sufficiente nel Teorema 2.10 affinché  $\mathcal{C}_{ab}$  sia un tensore di Codazzi diviene:

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \mathcal{A}(t) \\ \mathcal{B} = \mathcal{B}(t) \\ \dot{\mathcal{B}} = -H\mathcal{A} \end{cases}$$

Le soluzioni GRW della gravità di Cotton sono quindi moltissime in quanto  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  sono due funzioni di  $t$  qualunque con il solo vincolo:

$$\dot{\mathcal{B}} = -H\mathcal{A} \quad (2.4.11)$$

Molte teorie gravitazionali alternative alla relatività generale hanno, in uno spazio-tempo di tipo fluido perfetto GRW, soluzioni che sono un sottogruppo di quelle della gravità di Cotton con una particolare scelta di  $\mathcal{B}$  ( $\mathcal{A}$  è fissato dal vincolo (2.4.11)). Questa affermazione verrà giustificata in seguito tramite il Teorema 2.20.

Possiamo adesso ricavare l'equivalente delle equazioni di Friedmann per la gravità di Cotton applicando il precedente teorema al tensore  $\hat{H}_{ab}$ .

Invertire le equazioni (2.4.9) e (2.4.10) permette di trovare:

$$A = \mathcal{A} \quad (2.4.12)$$

$$B = \mathcal{A} - (n-1)\mathcal{B} \quad (2.4.13)$$

Usiamo questo fatto insieme alla formula (2.3.33), la quale era stata ricavata senza usare le equazioni di campo della gravità di Killing conforme, all'interno di  $T_{ab} = \frac{G_{ab}}{8\pi G} - \hat{H}_{ab}$ . Il tensore energia-momento ha la forma (2.2.20), quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} (\rho+p)u_a u_b + p g_{ab} = & \left\{ (8\pi G)^{-1} \left[ \frac{{}^*R}{(n-1)a^2} - (n-2)\dot{H} \right] - \mathcal{A} \right\} u_a u_b + \\ & + \left\{ (8\pi G)^{-1} \left[ -\frac{(n-3){}^*R}{2(n-1)a^2} - (n-2)\dot{H} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(n-1)(n-2)}{2} H^2 \right] - \mathcal{A} + (n-1)\mathcal{B} \right\} g_{ab} \quad (2.4.14) \end{aligned}$$

Che, utilizzando (2.4.11), porta alle equazioni:

$$8\pi G p = -\frac{(n-3){}^*R}{2(n-1)a^2} - (n-2)\dot{H} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} H^2 + 8\pi G \frac{\dot{\mathcal{B}}}{H} + 8\pi G (n-1)\mathcal{B} \quad (2.4.15)$$

$$8\pi G (p + \rho) = \frac{{}^*R}{(n-1)a^2} - (n-2)\dot{H} + 8\pi G \frac{\dot{\mathcal{B}}}{H} \quad (2.4.16)$$

Se  $n = 4$ ,  ${}^*R = 6k$  e  $\mathcal{B} = (8\pi G)^{-1} \frac{\Lambda}{n-1}$  queste sono equivalenti alle equazioni di Friedmann.

Analogamente a quanto fatto per il tensore  $K_{ab}$  nel contesto della gravità di Killing conforme, la divergenza nulla di  $H_{ab}$  permette di considerarne il contributo tramite una densità e una pressione fittizia all'interno di  $T_{ab}$ . Chiamerò queste, rispettivamente,  $\rho_{\text{dark}}$  e  $p_{\text{dark}}$ . Per trovare queste quantità in funzione di  $\mathcal{B}$  occorre utilizzare (2.4.12), (2.4.13) e (2.4.11), insieme ad:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ab} &= A u_a u_b + B g_{ab} \\ &\stackrel{!}{=} (p_{\text{dark}} + \rho_{\text{dark}}) u_a u_b + p_{\text{dark}} g_{ab} \end{aligned}$$

Si trovano in questo modo le seguenti relazioni:

$$p_{\text{dark}} = -\frac{\dot{\mathcal{B}}}{H} - (n-1)\mathcal{B} \quad (2.4.17)$$

$$\rho_{\text{dark}} = (n-1)\mathcal{B} \quad (2.4.18)$$

Si consideri adesso una teoria gravitazionale con le seguenti caratteristiche:

1. Ha equazione di campo  $G_{ab} = 8\pi G(T_{ab} + \mathring{H}_{ab})$ , dove  $\mathring{H}_{ab}$  è un tensore generico.
2. Vale la conservazione di energia-momento (sia nel caso in cui questa sia conseguenza dalle equazioni di campo, come vorrebbe il criterio 2, che se questa venga imposta).

Si consideri l'applicazione di questa teoria a una varietà GRW con le seguenti caratteristiche:

- A  $R_{ab}$  è di tipo fluido perfetto (o una condizione equivalente data dal teorema 2.10).
- B Vengono considerate fonti di energia di tipo fluido perfetto.

Si sottolinea che la gravità di Killing conforme rispetta le ipotesi 1, 2 ed inoltre le varietà che seguono le condizioni sopramenzionate sono le stesse per cui avevamo indagato le soluzioni nella gravità di Killing conforme (sottosezione: [Cosmologia](#)).

L'identità di Bianchi e l'ipotesi 2 portano  $\mathring{H}_{ab}$  ad avere la proprietà:  $\nabla_k \mathring{H}^k{}_a = 0$ .

Le condizioni A, B hanno, come conseguenza delle equazioni di campo (ipotesi 1), che  $\mathring{H}_{ab}$  è di tipo fluido perfetto.

Teorie che soddisfano le ipotesi 1 e 2 hanno soluzioni GRW con caratteristiche A e B che sono un sottoinsieme di quelle della gravità di Cotton. Vale infatti il seguente teorema:

**Teorema 2.20.**

In uno spaziotempo GRW sia  $T_{ab} = Au_a u_b + Bg_{ab}$  un tensore qualunque con  $A=A(t)$ ,  $B=B(t)$ , allora:

$\nabla_k T^k{}_a = 0 \Rightarrow T_{ab} = \mathcal{C}_{ab} - \mathcal{C}g_{ab}$  con  $\mathcal{C}_{ab}$  tensore di Codazzi di tipo fluido perfetto:

$\mathcal{C}_{ab} = \mathcal{A}u_a u_b + \mathcal{B}g_{ab}$ , dove:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= A \\ \mathcal{B} &= \frac{A - B}{n - 1} \end{aligned}$$

**Dimostrazione:**

La contrazione di  $\mathcal{C}_{ab} = \mathcal{A}u_a u_b + \mathcal{B}g_{ab}$  mi porta a trovare

$$\mathcal{C} = -\mathcal{A} + n\mathcal{B} \quad (2.4.19)$$

Usando questo risultato è immediato verificare che:

$$\mathcal{A} = A, \quad \mathcal{B} = \frac{A-B}{n-1} \Rightarrow T_{ab} = \mathcal{C}_{ab} - \mathcal{C}g_{ab} = Au_a u_b + Bg_{ab}.$$

Devo poi verificare che in una varietà GRW:

$\nabla_k T^k_a = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{ab}$  è un tensore di Codazzi.

Il calcolo della divergenza di  $T_{ab} = \mathcal{C}_{ab} - \mathcal{C}g_{ab}$ , ricordando: l'equazione (2.2.21),  $u \equiv 0$  (Teorema 2.9) e l'equazione (2.4.19), porta ad ottenere:  $[\mathcal{A} + (n-1)H\mathcal{A}]u_b = \nabla_b[-\mathcal{A} + (n-1)\mathcal{B}]$ . Contraendo questa equazione con  $u^b$  si ottiene  $\mathcal{B} = -H\mathcal{A}$ . Grazie al Corollario 2.19.1 questo implica che  $\mathcal{C}_{ab}$  è un tensore di Codazzi.  $\square$

Tramite (2.4.15) e (2.4.16) è possibile trovare l'equivalente delle equazioni di Friedmann per le teorie gravitazionali che rispettano le condizioni sovramenzionate (1, 2, A, B).

In questo modo, nel caso RW, è stata fatta un'analisi dettagliata di molte teorie gravitazionali e del loro legame con la gravità di Cotton nell'articolo: [13]. L'oggetto di questo paragrafo è limitato all'analisi del legame tra la gravità di Cotton e la gravità di Killing conforme.

L'equazione (2.3.26) mi dice che per la gravità di Killing conforme devono valere:

$$A = (8\pi G)^{-1} \frac{Ca^2}{n-1} \quad (2.4.20)$$

$$B = (8\pi G)^{-1} \left[ \frac{(n+1)}{2(n-1)} Ca^2 - \Lambda \right] \quad (2.4.21)$$

Inserendo (2.4.20) e (2.4.21) all'interno di (2.4.9) e (2.4.10) trovo:

$$\mathcal{B} = -(8\pi G)^{-1} \frac{Ca^2}{2(n-1)} \quad (2.4.22)$$

$$\mathcal{A} = (8\pi G)^{-1} \frac{Ca^2}{n-1} \quad (2.4.23)$$

Le quali, come ci si aspetta, rispettano il vincolo (2.4.11).

Con questa scelta le equazioni: (2.3.34), (2.3.35) divengono le equazioni: (2.4.15) e (2.4.16). Le equazioni (2.4.17), (2.4.18) sono invece ottenute a partire da: (2.3.45), (2.3.46). Ricapitolando abbiamo visto che in cosmologia, per varietà lorentziane GRW di tipo fluido perfetto e con  $T_{ab}$  anch'esso di tipo fluido perfetto, le soluzioni della gravità di Killing conforme sono un sottogruppo di quelle della Cotton gravity. In particolare sono quelle che si ottengono con la scelta (2.4.22).

La gravità di Cotton non è considerata predittiva vista la vastità di soluzioni ammesse dalla teoria. La gravità di Killing conforme ammette invece solo un sottogruppo molto ristretto di soluzioni rispetto a quelle della gravità di Cotton. Pertanto la gravità di Killing conforme risulta più facilmente falsificabile sperimentalmente.



## 3 Analisi del modello tramite dati sperimentali

L'oggetto di questo capitolo sarà l'applicazione della gravità di Killing conforme ai dati sperimentali cosmologici. Pertanto verrà considerato il caso  $n = 4$ , poiché la realtà in cui viviamo è una varietà con una dimensione temporale e tre spaziali.

Il principio cosmologico afferma che per grandi distanze il nostro universo appare spazialmente omogeneo e isotropo. Quindi per grandi distanze il nostro universo avrà la metrica RW (2.2.16). Possiamo quindi utilizzare i risultati trovati nella sottosezione [Cosmologia](#) all'interno della sezione 2.3.

### 3.1. Misure del parametro di Hubble

Una grandezza estremamente importante in cosmologia è il redshift cosmologico. Si consideri un'onda elettromagnetica ipotetica emessa con una lunghezza d'onda  $\lambda_{em}$ . Un osservatore misura poi la lunghezza d'onda della stessa onda, che denoteremo con  $\lambda_{oss}$ . Il redshift cosmologico viene definito come:  $z := \frac{\lambda_{oss}}{\lambda_{em}} - 1$ . Il valore di  $\lambda_{oss}$  differisce da quello di  $\lambda_{em}$  poiché, durante il viaggio in cui l'onda raggiunge l'osservatore, l'universo si è espanso causando l'allontanamento dei fronti d'onda.

Il redshift cosmologico è misurabile sperimentalmente.

In uno spaziotempo RW vale:

$$(1 + z)^{-1} = \frac{a}{a_0} \quad (3.1.1)$$

Il parametro di Hubble ( $H$ ), già definito in precedenza dall'equazione (2.2.17), è una grandezza cosmologica che viene misurata a diversi redshift e che permette di fare previsioni a partire da teorie gravitazionali.

#### Cronometri cosmici

Per misurare sperimentalmente il parametro di Hubble uno dei metodi usati è quello dei cronometri cosmici. Per brevità si fa riferimento a questo metodo anche con la sigla CC oppure con DA (*Differential Ages*).

Il metodo dei cronometri cosmici sfrutta la formula:

$$H = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt} \approx -\frac{1}{1+z} \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (3.1.2)$$

La quale è ottenibile a partire da (3.1.1).

I cronometri cosmici permettono di misurare l'intervallo di tempo  $\Delta t$  che è passato tra l'emissione di due onde provenienti da sorgenti che si trovano ad un redshift circa uguale a  $z$  ma che tra di loro hanno una differenza di redshift pari a  $\Delta z$ , dove  $\Delta z \ll z$ . Per descrivere il metodo dei cronometri cosmici farò riferimento al metodo usato all'interno dell'articolo [14].

I migliori cronometri cosmici sono galassie in cui non avvengono processi di formazione di nuove stelle nel momento in cui l'onda è stata emessa. Si dice che galassie di questo tipo stiano evolvendo in modo passivo. Per questo motivo vengono selezionate

galassie molto rosse. Infatti il colore delle galassie è determinato dalla loro popolazione stellare e le stelle blu sono stelle giovani.

Per la scelta dei cronometri cosmici si prediligono inoltre galassie ellittiche e galassie molto massicce. Questo è conseguenza del fatto che galassie con queste caratteristiche hanno avuto un processo di formazione di stelle molto rapido all'inizio della loro vita, facendo sì che in tempi recenti queste evolvano passivamente.

Una volta selezionato un gruppo di galassie con le caratteristiche sopramenzionate si procede a misurarne il redshift e a farne una analisi spettroscopica.

Le misure di  $z$  sono estremamente accurate in quanto hanno errori  $\sigma_z \sim 0.001$ , il contributo di questi errori al fine di determinare  $H$  è quindi trascurabile rispetto agli altri errori.

Tramite l'analisi spettroscopica si evidenzia una discontinuità del flusso di potenza  $F_\nu$  proveniente da queste galassie attorno a  $\lambda = 4000\text{\AA}$ . Questo è dovuto alle linee di assorbimento degli elementi metallici all'interno della galassia.

Questa discontinuità viene quantificata dalla grandezza  $D4000$ .

$$D4000 := \frac{(\lambda_2^b - \lambda_1^b) \int_{\lambda_2^r}^{\lambda_1^r} F_\nu(\lambda) d\lambda}{(\lambda_2^r - \lambda_1^r) \int_{\lambda_2^b}^{\lambda_1^b} F_\nu(\lambda) d\lambda} \quad (3.1.3)$$

Come mostra la formula  $D4000$  rappresenta il rapporto tra il flusso di potenza medio nell'intervallo  $\lambda \in (\lambda_1^r, \lambda_2^r)$  con in flusso medio nell'intervallo  $\lambda \in (\lambda_1^b, \lambda_2^b)$  (dove l'apice "r" sta per rosso mentre "b" sta per blu).

La scelta degli intervalli di lunghezze d'onda può variare ma in genere si adottano le seguenti definizioni:  $\lambda_1^b := 3750\text{\AA}$ ,  $\lambda_2^b := 3950\text{\AA}$ ,  $\lambda_1^r := 4050\text{\AA}$ ,  $\lambda_2^r := 4250\text{\AA}$ . Nel lavoro [14] sono però stati usati i valori:  $\lambda_1^b := 3850\text{\AA}$ ,  $\lambda_2^b := 3950\text{\AA}$ ,  $\lambda_1^r := 4000\text{\AA}$ ,  $\lambda_2^r := 4100\text{\AA}$ .

È necessario adesso introdurre alcune grandezze associate alla popolazione stellare delle galassie. Una prima grandezza rilevante è la metallicità. Questa è indicata con la lettera  $Z$  e corrisponde al rapporto tra la massa dovuta ad elementi metallici (elementi che non sono idrogeno o elio) e la massa totale.

Tramite l'analisi spettroscopica è possibile misurare la metallicità della popolazione stellare delle galassie. Si misura in questo modo la metallicità dei cronometri cosmici selezionati precedentemente.

Un'altra grandezza associata alla popolazione stellare delle galassie è la "Star Formation Rate" (SFR) che misura la massa di gas, all'interno della galassia, trasformata in massa stellare, per unità di tempo. Questa è una funzione del tempo.

Galassie con la stessa SFR e la stessa metallicità hanno un'età che segue un andamento lineare al variare di  $D4000$ , vale infatti:  $t = A(Z, SFR)D4000 + B(Z, SFR)$  da cui segue:

$$\Delta t = A(Z, SFR)\Delta D4000 \quad (3.1.4)$$

Usando questa equazione insieme a (3.1.2) si ottiene:

$$H \approx -\frac{A(Z, SFR)}{1+z} \frac{\Delta z}{\Delta D4000} \quad (3.1.5)$$

La stima di  $H$  è quindi possibile a partire dalla stima di  $z$ ,  $D4000$  e  $A(Z, SFR)$ . Le galassie selezionate vengono separate in due categorie, più massicce e meno massicce. Per ognuna di queste due categoria le galassie scelte come cronometri cosmici sono raggruppate in bin corrispondenti all'intervallo di redshift:  $z \pm \frac{\Delta z}{2}$ . I valori di  $D4000$  considerati sono quindi la mediana corrispondente ai dati all'interno del bin. L'errore associato a questa misura è pari a  $1.482 \frac{\text{mediana}(|D4000 - \text{mediana}(D4000)|)}{\sqrt{N}}$ , dove  $N$  è il numero di galassie all'interno del bin.

La larghezza del bin  $\Delta z$  varia a seconda del bin considerato in modo da avere un valore di  $N$  circa uguale in ogni bin. Per stimare  $A(Z, SFR)$  si assume un andamento di  $SFR(t)$ . Nel caso di [14] si è considerato un SFR della forma:  $SFR(t) \propto \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$ . Adottando dei modelli si può ottenere, a partire da un determinato SFR, l'andamento di  $D4000(t)$  per diversi valori di  $Z$ . Vengono quindi considerati tre valori di  $Z$  che coprono un ampio intervallo di valori della metallicità assumibili.

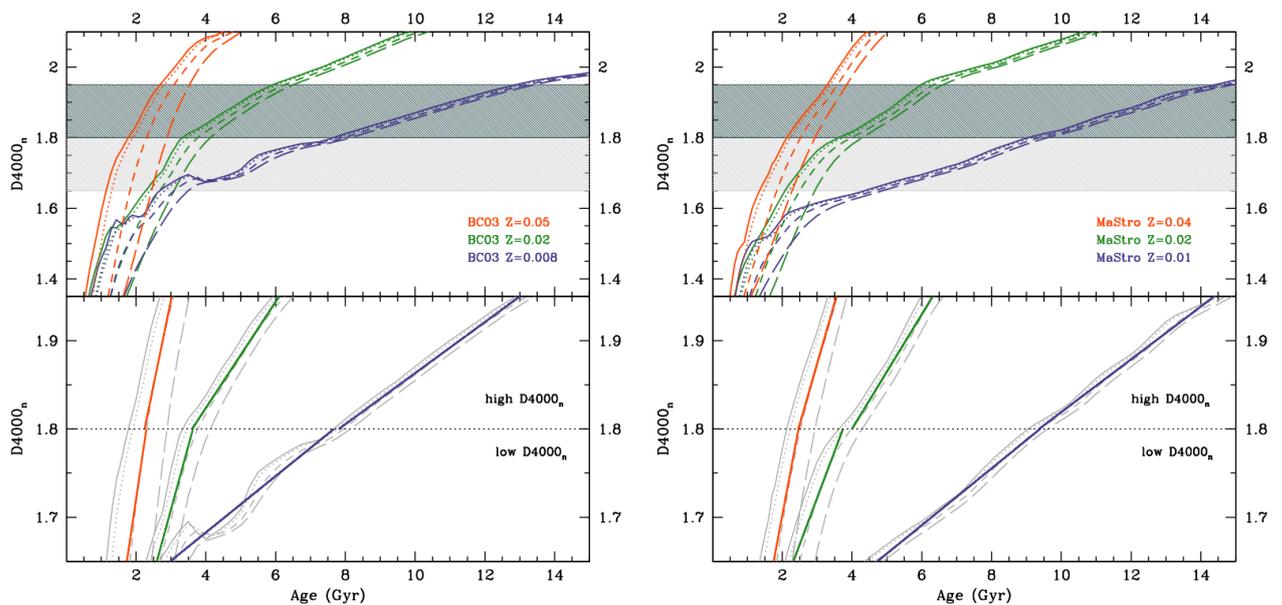


Figura 1: I seguenti grafici provengono da [14]. I grafici a sinistra sono associati al modello BC03 mentre quelli a destra si basano sul modello MaStro. Diversi colori sono associati a metallicità diverse come indica la legenda dei grafici superiori. I grafici superiori sono la predizione del modello ad ogni tempo. Le diverse tratteggiature delle linee corrispondono a diversi valori di  $\tau$  all'interno di  $SFR(t)$ . I valori di  $D4000$  assunti dai cronometri cosmici sono nell'intervallo grigio scuro e grigio chiaro evidenziati nei due grafici superiori. Questi intervalli sono riportati nei grafici inferiori in cui viene approssimata  $D4000$  ad una funzione lineare.

Vedendo la Figura 1, che è frutto dell'analisi presentata all'interno dell'articolo [14], si può vedere che gli andamenti di  $D4000(t)$  (fissando  $Z$  e  $SFR$ ) sono in buona approssimazioni lineari nell'intervallo  $1.65 < D4000 < 1.95$ , se si considerano separatamente le regioni  $1.65 < D4000 < 1.8$  e  $1.8 \leq D4000 < 1.95$ . I cronometri cosmici selezionati

vengono quindi divisi in due categorie a seconda che abbiano  $D4000 \geq 1.8$  oppure  $D4000 < 1.8$ . Per ognuna di queste due categorie e per ognuno dei tre  $Z$  scelti viene quindi stimato un valore di  $A$ , a partire dal modello scelto. Nel caso dell'articolo [14] sono stati considerati due modelli chiamati: "MaStro" e "BC03". Poiché le misure di  $H(z)$  ottenute a partire dai due modelli sono risultate molto simili l'articolo giunge alla conclusione che la determinazione delle misure del parametro di Hubble non dipende dal modello adottato.

L'errore di  $A(Z)$  è ottenuto calcolando la deviazione standard delle stime di  $A(Z)$  fatte con diversi  $\tau$  all'interno di  $SFR$ .

Per trovare il valore di  $A(Z)$  per una metallicità intermedia tra quelle considerate si interpolano i valori di  $A$  calcolati ipotizzando un andamento quadratico. Avendo calcolato  $A(Z)$  per tre diverse  $Z$  si ha così una sola predizione dell'andamento  $A(Z)$  tramite l'interpolazione. Si ottiene in questo modo una stima di  $A$ , con relativo errore, per ogni  $Z$  possibile e considerando separatamente i regimi:  $D4000 < 1.8$  e  $D4000 \geq 1.8$ . Il risultato dell'interpolazione ottenuto all'interno di [14] è riportato in Figura 2.

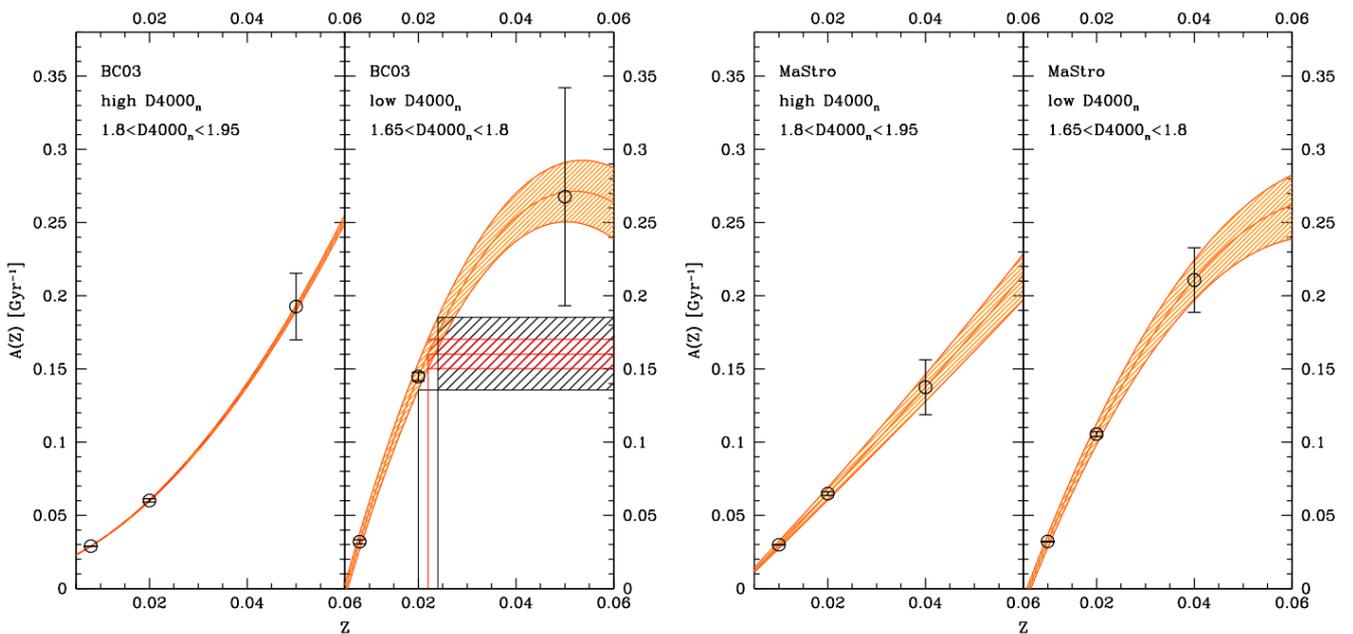


Figura 2: I seguenti grafici provengono da [14] e rappresentano l'interpolazione di  $A(Z)$ , con il relativo errore, a partire dalle tre stime di  $A(Z)$  associate a:  $Z = 0.008$ ,  $Z = 0.02$  e  $Z = 0.05$ .

I grafici a sinistra si basano sul modello BC03 mentre quelli a destra sul modello MaStro.

A sinistra l'area rossa evidenzia il contributo stimato usando diversi valori di  $\tau$ . L'area nera mostra l'errore se si considera anche l'incertezza dovuta alle misure di  $Z$ . Entrambi i contributi sono mostrati in  $Z = 0.022 \pm 0.002$  in quanto questo è l'intervallo che comprende tutti i valori di  $Z$  dei cronometri cosmici selezionati all'interno di [14].

È quindi possibile stimare il parametro di Hubble tramite la formula (3.1.5) utilizzando i valori:  $D_{4000}$ ,  $A(Z)$  calcolati per ogni bin. Viene quindi usata la formula (3.1.5) considerando  $\Delta z$  come la distanza tra i redshift corrispondenti al bin  $i$ -esimo e al bin  $i+\tilde{N}$ -esimo (dove  $\tilde{N}$  varia a seconda del redshift ma tendenzialmente assume sempre un valore tra 1 e 3) e  $z$  è posto pari al valore medio dei redshift corrispondenti ai bin considerati.

Questa analisi viene fatta separatamente per le galassie più massicce e quelle meno massicce. All'interno di [14] i dati ottenuti usando galassie appartenenti alle due categorie sopramenzionate sono risultati compatibili. Le stime finali di  $H(z)$  sono quindi ottenute come medie pesate degli  $H(z)$  ottenuti usando solo le galassie più massicce e solo quelle meno massicce.

## Oscillazioni acustiche barioniche

Nelle prime centinaia di migliaia di anni dopo il Big Bang il nostro universo era costituito dal plasma primordiale, composto da elettroni e barioni.

Si consideri un punto in cui il plasma presenta una densità di materia maggiore rispetto ai punti circostanti. Qui vi sarà una tendenza ad attrarre ulteriore materia. Questo porta ad un aumento di temperatura in un intorno del punto. Come conseguenza la pressione aumenta, a causa dello scattering Thomson dei fotoni emessi, con la materia barionica. Questo causa una forza verso l'esterno che spinge la materia barionica in quella regione ad espandersi, determinando un raffreddamento del plasma e la conseguente diminuzione della pressione verso l'esterno. L'equilibrio viene quindi raggiunto rilasciando la pressione in eccesso sotto forma di un'onda sferica longitudinale, equivalente alle onde sonore, che si espande nel plasma primordiale portando con se materia barionica.

Circa 379000 anni fa, al redshift  $z \approx 1089$ , avviene la cosiddetta ricombinazione. L'universo raggiunge una espansione tale che il plasma cosmico si raffredda abbastanza da permettere la combinazione di elettroni e protoni in atomi neutri di idrogeno. Questi non sono più soggetti allo scattering Thomson e come conseguenza le onde di densità di materia barionica smettono di propagarsi con i fotoni. L'assenza di pressione esterna fa sì che la gravità domini e che si formino strutture di materia. La maggior parte della materia si concentra nelle regioni di sovra-densità da cui sono partite le onde acustiche. Una parte di essa tuttavia si localizza nei punti corrispondenti ai picchi delle onde acustiche, responsabili del trasporto di materia barionica, nel momento della ricombinazione. Vi sarà quindi un guscio sferico con una concentrazione di materia che è maggiore delle regioni circostanti. La distanza di questa regione dal punto da cui l'onda ha iniziato a propagarsi sarà quindi pari alla distanza percorsa dall'onda acustica fino all'epoca della ricombinazione, ossia:

$$r_s = \int_0^{t^*} \frac{a_0}{a(t)} c_s dt = \int_{z^*}^{+\infty} \frac{c_s}{H(z)} dz \approx 150 \text{Mpc} \quad (3.1.6)$$

dove  $t^*$  indica il tempo a cui è avvenuta la ricombinazione,  $z^*$  il redshift corrispondente alla ricombinazione e  $c_s$  la velocità di propagazione dell'onda acustica.

Una stima di  $r_s$  è stata fatta a partire dalla radiazione cosmica di fondo ed è:

$r_s = 153.3 \pm 2.0 \text{ Mpc}$ .

Uno schema esplicativo di quanto appena spiegato è riportato in Figura 3.

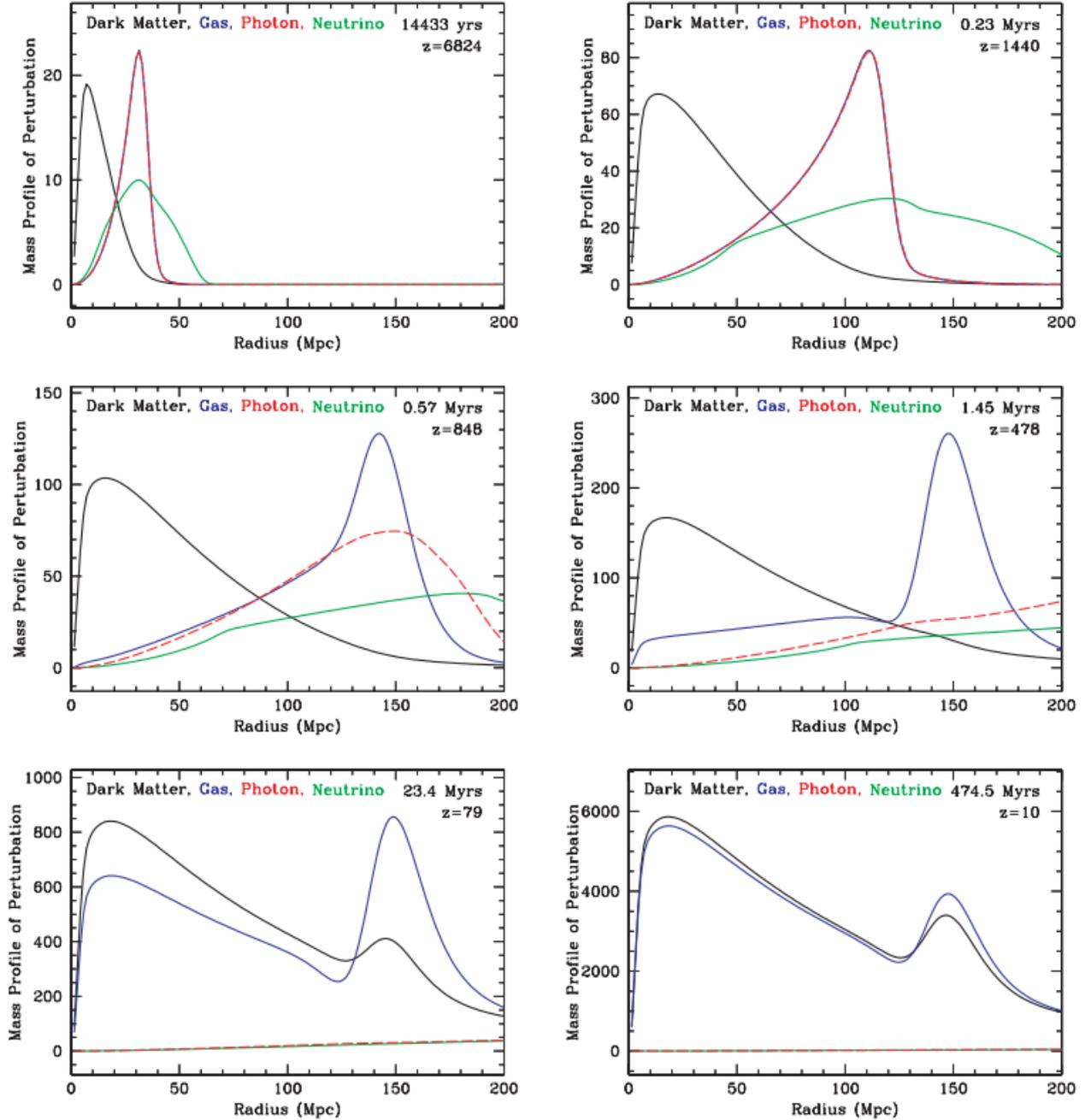


Figura 3: In questa immagine è riportata l'evoluzione di una perturbazione nella distribuzione della massa all'interno dell'universo primordiale. In alto a destra di ogni pannello sono indicati redshift e tempo ad esso corrispondenti. Si può notare, guardando gli ultimi pannelli, come questa perturbazione causi una sovrabbondanza di materia ad una distanza  $r = r_s \approx 150 \text{ Mpc}$  rispetto al punto da cui la perturbazione ha iniziato a propagarsi. Le immagini usano unità arbitrarie per il profilo di massa ma sono coerenti tra pannelli diversi. Questa illustazione, presentata all'interno di [5], è diventata molto famosa.

La distanza  $r_s$  è detta orizzonte sonico e fornisce un modo per misurare distanze comoventi a partire dalla distribuzione di galassie. Infatti questa perturbazione dell'omogeneità dell'universo è osservabile tutt'oggi in quanto costituisce una distanza di separazione privilegiata tra diverse galassie. Questo fenomeno prende il nome di "Oscillazione acustica barionica" a cui si fa riferimento con la sigla BAO. L'orizzonte sonico costituisce quello che è detto un righello cosmico statistico, così denominato in quanto permette di misurare distanze a partire dallo studio statistico della distribuzione di galassie.

Si consideri un volume infinitesimo che si trova a redshift  $z$ , delimitato da un angolo solido infinitesimo  $d\theta d\phi$  e da una profondità lungo la linea di vista che corrisponde a una differenza di redshift  $dz \ll z$ . Si possono stimare allora le distanze comoventi che caratterizzano questo volume lungo la linea di vista e lungo il piano perpendicolare all'asse ottico, rispettivamente, tramite:

$$s_{\parallel} = \frac{c}{H(z)} dz \quad (3.1.7)$$

$$s_{\perp} = d_A(z) d\theta \quad (3.1.8)$$

dove  $c$  è la velocità della luce e

$$d_A(z) = \frac{c}{H_0(1+z)\sqrt{-\Omega_{k,0}}} \sin\left(H_0\sqrt{-\Omega_{k,0}} \int_0^z \frac{dz}{H(z)}\right) \quad (3.1.9)$$

è la distanza di diametro angolare.

La formula (3.1.9) è valida per ogni  $\Omega_{k,0} \in \mathbb{R}$ . Se  $\Omega_{k,0} \leq 0$  è quindi necessario considerare la radice e il seno come funzioni a valori complessi (il caso  $\Omega_{k,0} = 0$  si ottiene considerando l'estensione con continuità della formula in  $\Omega_{k,0} = 0$ ).

Una misura della differenza di redshift  $dz$  corrispondente ad una distanza nota  $s_{\parallel}$  lungo la linea di vista permette quindi una stima di  $H$ . Analogamente una misura dell'angolo corrispondente a una lunghezza nota lungo il piano perpendicolare all'asse ottico permette di stimare  $d_A$ . Uno schema esemplificativo di quanto appena spiegato è stato riportato in Figura 4.

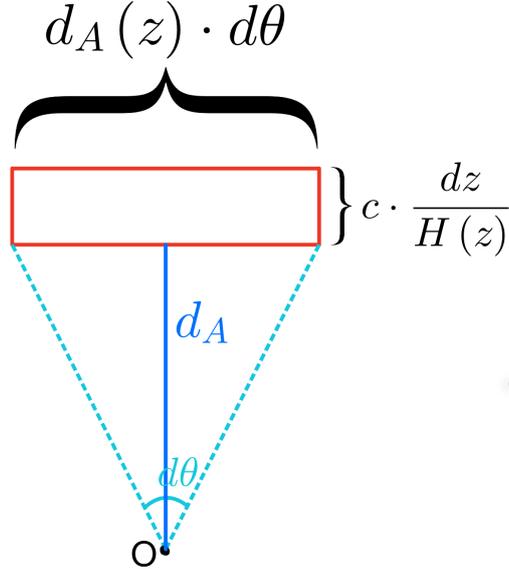


Figura 4: Disegno che mostra come sono legate le quantità  $d_A$  e  $H(z)$  alle distanze lungo la linea di vista e lungo il piano ad essa perpendicolare. Per chiarezza l'immagine considera una sola direzione lungo il piano perpendicolare alla linea di vista. La posizione dell'osservatore è indicata dalla lettera O. In rosso è rappresentato un oggetto fittizio con una differenza di redshift  $dz$  tra la parte davanti e quella dietro. Perpendicolarmente alla linea di vista l'oggetto ha una estensione a cui corrisponde la distanza angolare infinitesima  $d\theta$ .

Se si misura  $\Delta z$  e  $\Delta\theta$  corrispondenti alla stessa distanza si può stimare, anche senza conoscere la distanza in questione, il prodotto  $H(z)d_A(z) \approx \frac{c\Delta z}{\Delta\theta(1+z)}$ . Determinare questa quantità dopo aver determinato  $H(z)$  e  $d_A(z)$  separatamente è un test che viene fatto ricorrentemente in letteratura e prende il nome di test di Alcock-Paczynski.

Individuare un gruppo di galassie attorno a un certo redshift  $z$  lungo lo stesso asse ottico e misurarne le differenze di redshift permette di trovare la differenza di redshift  $\Delta z_{BAO}(z)$  a cui corrisponde il massimo locale, nella distribuzione di galassie, dovuto al fenomeno delle BAO. Usando la formula (3.1.7) con  $s_{\parallel} = r_s$  è possibile, se si conosce  $r_s$  ottenere una stima di  $H(z)$  dove  $z$  è un redshift efficace in genere stimato tramite la media dei redshift delle galassie (con simili redshift) selezionate.

L'approccio più semplice per ottenere una stima di  $H$  è quindi quello di considerare il valore  $r_s = 153.3 \pm 2.0 \text{Mpc}$ , il quale è stimato a partire dalla radiazione cosmica di fondo (CMB).

In questo modo il problema di misurare  $H(z)$  si riduce alla misura di  $\Delta z_{BAO}(z)$  tramite studi statistici sulla distribuzione delle galassie. Questi studi statistici vengono però in genere fatti nello spazio delle distanze comoventi e non in quello dei redshift. Per convertire i redshift  $z$  in distanze comoventi è necessario usare la formula:

$$r_{l.o.s.} = \int_0^z \frac{cdz}{H_{rif}(z)} \quad (3.1.10)$$

la quale però richiede di assumere un modello cosmologico di riferimento che dia una previsione del parametro di Hubble in funzione del redshift:  $H_{rif}(z)$ . Poichè non vogliamo però avere stime di  $H$  che dipendano dal modello possiamo sfruttare un procedimento intelligente che permette di passare allo spazio delle distanze comoventi assumendo un andamento  $H(z)$  ed, a partire da queste distanze, ottenere risultati che non dipendono da questa scelta.

Una scelta sensata per il modello di riferimento che descriva  $H_{rif}(z)$  è il modello  $\Lambda$ CDM, il quale è basato sulla relatività generale, con costante cosmologica, in un universo piatto e trascurando il contributo della radiazione per l'evoluzione dell'universo. Questo è il modello cosmologico tutt'oggi accettato.

$\Lambda$ CDM prevede  $H_{rif} = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{m,0})}$ . All'interno di [6] sono stati usati considerati i valori:  $\Omega_{m,0} = 0.25$ ,  $H_0 = 72 \frac{km}{s \cdot Mpc}$  portando così alla formula  $H_{rif} = 72 \sqrt{0.25(1+z)^3 + 0.75} \frac{km}{s \cdot Mpc}$ . È opportuno notare però che le migliori stime dei valori dei parametri di densità e di  $H_0$  possono variare leggermente a seconda dell'analisi fatta a partire dal modello  $\Lambda$ CDM. Valori leggermente diversi sono stati trovati da me tramite l'analisi descritta all'interno della sezione 3.2 e sono riportate all'interno della Tabella 1.

Usando quindi  $H_{rif} = 72 \sqrt{0.25(1+z)^3 + 0.75} \frac{km}{s \cdot Mpc}$  all'interno di (3.1.10) si calcolano le distanze comoventi delle galassie, lungo la linea di vista, mantenendo separati i set di dati corrispondenti a diversi redshift efficaci. A partire da questi è possibile fare un'analisi statistica e, misurando la distanza privilegiata (intorno a 150Mpc) tra due galassie, trovare una stima dell'orizzonte sonico  $r_{s,rif}$  per ogni set di dati. Posso, usando (3.1.7), trovare la quantità  $\Delta z_{BAO}(z) = \frac{H_{rif}(z)r_{s,rif}}{c}$ . Questa quantità però è intrinsecamente presente nei dati, i quali sono campionati nel dominio del redshift.

Si consideri ora il caso ipotetico in cui io avessi usato l'esatto andamento del parametro di Hubble  $H_{vero}(z)$  per convertire i redshift in distanze comoventi. In quel caso avrei potuto determinare, tramite la stessa analisi statistica usata con il modello di riferimento, il valore esatto dell'orizzonte acustico  $r_{s,vero}$ . Tramite questo modello avrei quindi ottenuto  $\Delta z_{BAO}(z) = \frac{H_{vero}(z)r_{s,vero}}{c}$ . Questo però dovrà coincidere con il valore ottenuto tramite il modello di riferimento, in quanto, come già esplicitato, l'informazione  $\Delta z_{BAO}$  è presente intrinsecamente nei dati.

Ne segue che, se ho una stima di  $r_s$  indipendente dal modello ( $r_{s,vero}$ ), posso ottenere stime di  $H(z)$  indipendenti dal modello tramite la formula:

$$H_{vero}(z) = \frac{r_{s,rif}}{r_{s,vero}} H_{rif}(z) \quad (3.1.11)$$

Dove  $r_{s,vero} = 153.3 \pm 2.0 \text{Mpc}$  è la stima dell'orizzonte sonico ottenuta a partire dalla radiazione cosmica di fondo. Il metodo sopra descritto è stato usato all'interno di [6]. In questo articolo si fa riferimento a questo metodo con il nome di "*Peak Method*". L'equazione (3.1.11) permette di calcolare stime di  $H$  a partire da stime di  $r_{s,rif}$ . Queste si possono ottenere in diversi modi, il metodo più utilizzato consiste nel ricostruire la funzione di correlazione a due punti:

$$\xi(r) := \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \quad (3.1.12)$$

Dove  $\delta(\vec{x}) := \frac{\rho(\vec{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$ .

$\rho(\vec{x})$  è la densità numerica di galassie nel punto con coordinata  $\vec{x}$  e  $\bar{\rho}$  è la densità numerica media di galassie. Questa funzione ha un andamento  $\xi(r) \propto r^{-1.8}$  per piccole distanze ed ha un picco localizzato intorno a  $r = r_s$  dovuto al fenomeno delle BAO. L'individuazione di questo picco fornisce quindi una stima di  $r_{s,rif}$ .

Un esempio di un andamento tipico della funzione di correlazione a due punti è riportato in Figura 5.

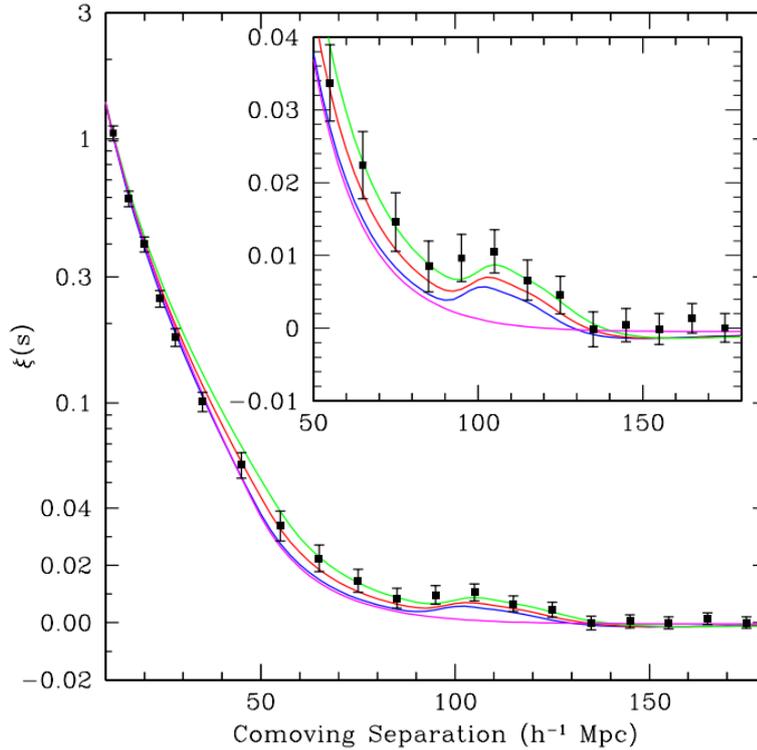


Figura 5: I seguenti grafici provengono da [4]. Le distanze comoventi in questo grafico sono indicate con  $s$  (mentre la notazione da me adottata usava la lettera  $r$ ). I punti con barre d'errore rappresentano le stime della funzione di correlazione a due punti misurata all'interno di [4]. Le linee colorate rappresentano le previsioni di  $\Lambda$ CDM corrispondenti a differenti valori di  $\Omega_{m,0}$ , in particolare sono:  $\Omega_{m,0}h^2 = 0.12$  (verde),  $0.13$  (rosso),  $0.14$  (blu). La linea rosa corrisponde ad un universo in cui la totalità della materia è costituita da materia oscura. Quest'ultima linea non presenta la presenza di alcun picco intorno a  $150\text{Mpc}$  in quanto, non essendo soggetta allo scattering Thomson con i fotoni, la materia oscura non può dare vita alle oscillazioni acustiche barioniche. In alto a destra è evidenziato l'andamento del grafico intorno al picco.

Lo scalare  $h$  è definito come  $h := \frac{H_0}{100} \left( \frac{\text{km}}{\text{s}\cdot\text{Mpc}} \right)^{-1}$  e nel realizzare questo grafico gli autori dell'articolo hanno usato  $h = 0.7$ .

Per stimare  $\xi(r)$  si discretizzano le distanze, precedentemente calcolate con il modello di riferimento, delle galassie con stesso redshift efficace, tramite un raggruppamento

in bin. Al  $j$ -esimo bin viene così associata una distanza comovente  $r_j$  lungo la linea di vista. Per ognuno di questi bin viene poi calcolata la densità numerica di galassie in esso presente  $n_j$ . Viene infine calcolata funzione:

$$DD(r) := \sum_{i < j} \sum_{|r_i - r_j| = r} n_j n_i \quad (3.1.13)$$

All'interno di questa funzione la variabile  $r$  assume valori discreti.

Vengono poi generate uniformemente  $N_R$  posizioni nello stesso volume in cui si trovano le galassie selezionate per le misure sperimentali. Questo dominio viene costruito utilizzando la stessa suddivisione in bin scelta in precedenza.

È quindi possibile stimare  $\xi(r)$  attraverso la formula:

$$\xi(r) = \frac{N_R}{N_D} \frac{DD(r)}{RR(r)} - 1 \quad (3.1.14)$$

Dove  $N_D$  è il numero di galassie all'interno del set di dati sperimentali selezionato per un determinato redshift e  $RR(r)$  è definito in modo analogo ad  $DD(r)$  ma invece di usare i dati sperimentali vengono usate le galassie generate randomicamente.

Ricapitolando vengono quindi misurati i redshift cosmologici di diverse galassie lungo la linea di vista corrispondente a una direzione fissata. Queste galassie sono poi separate in diversi set di dati in modo che ognuno di questi sia composto da galassie con redshift simili. Viene poi calcolato per ognuno di questi set di dati la media dei redshift delle galassie che lo compongono, la quale sarà il redshift associato alla misura di  $H(z)$  che sarà ottenuta a partire da essi. Vengono poi convertiti i redshift delle singole galassie in distanze cosmologiche usando un modello di riferimento e la formula (3.1.10).

Queste distanze vengono poi discretizzate e, con l'ausilio di una simulazione che genera uniformemente una distribuzione di galassie, viene stimata la funzione di correlazione a due punti tramite (3.1.14). La misura del picco di  $\xi(r)$  in prossimità di  $r \approx 150 \text{Mpc}$  permette così di misurare il valore di  $r_{s,rif}$ , il quale porta a una stima di  $H$  tramite la formula (3.1.11).

La selezione di galassie con stesso redshift  $z$ , in una regione delimitata da un piccolo angolo solido (dove piccolo indica che deve valere l'approssimazione di campo lontano), permette di determinare la separazione angolare  $\Delta\theta_{BAO}(z)$ , associata al picco di  $\xi$  e corrispondente all'orizzonte sonico. Questo permette di stimare  $d_A(z)$  attraverso l'equazione (3.1.8). Una misura di  $d_A(z)$  e di  $H(z)$  con il metodo BAO e allo stesso redshift permette di fare il test di Alcock-Paczynsky, il quale, come già accennato, prevede la verifica che l'equazione:

$$H(z)d_A(z) = \frac{c \Delta z_{BAO}(z)}{(1+z)\Delta\theta_{BAO}(z)} \quad (3.1.15)$$

risulti compatibile con gli errori sperimentali.

È possibile fare questo test in quanto la distanza spaziale associata a  $\Delta\theta_{BAO}(z)$  è uguale alla distanza associata a  $\Delta z_{BAO}(z)$  ed è pari al valore di  $r_s$ .

### 3.2. Fit dei parametri di densità

Se si assume  $H > 0$ , usando la formula (3.1.1), si può riscrivere (2.3.51) come:

$$H = H_0 \sqrt{\left[ \sum_J \Omega_{J,0} (1+z)^{3(w_J+1)} + \Omega_{k,0} (1+z)^2 \right]} \quad (3.2.1)$$

L'assunzione  $H > 0$  è garantita dalle osservazioni che indicano un universo, fino ad ora, in espansione.

Il modello cosmologico attualmente accettato è  $\Lambda$ CDM, il quale applica la relatività generale ad un universo composto da materia e radiazione. La radiazione è stimata avere  $\Omega_{r,0} \approx 9.16 \cdot 10^{-5}$  che è molto minore di  $\Omega_{m,0} \approx 0.3$ . L'epoca dominata dalla radiazione è convenzionalmente posta a  $z \geq 10^4$ , il quale è però un valore estremamente elevato rispetto ai redshift per cui si riesce a misurare  $H$ .

Misure delle anisotropie della radiazione cosmica di fondo rivelano che il nostro universo ha una geometria piatta  $\Omega_k \approx 0$ .

Per i motivi sopra spiegati l'approccio usato in  $\Lambda$ CDM è quello di fittare la formula (3.2.1) ponendo  $\Omega_{r,0} = \Omega_{k,0} = 0$  e ottenendo  $\Omega_{\Lambda,0}$  come  $1 - \Omega_{m,0}$ .

Seguendo un approccio analogo per la gravità di Killing conforme ho eseguito un fit per determinare il valore dei parametri  $H_0, \Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}, \Omega_{\text{eff},0}$  mentre gli altri li ho posti uguali a 0.  $H_0, \Omega_{m,0}$  e  $\Omega_{\Lambda,0}$  sono ottenuti dal fit mentre il parametro  $\Omega_{\text{eff},0}$  è ottenuto a partire dalla formula (2.3.49):  $\Omega_{\text{eff},0} = 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}$ .

La formula da me fittata è stata quindi:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} (1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}) (1+z)^{-2}} \quad (3.2.2)$$

I risultati ottenuti con la teoria della gravità di Killing conforme sono denotati con CKG e sono comparati a quelli ottenuti con il modello  $\Lambda$ CDM a partire dai medesimi dati sperimentali. I dati sperimentali usati sono riportati nell'appendice B all'interno della Tabella B.1.

Queste misure provengono dalla tabella riportata in [15] a cui è stata aggiunta la misura ottenuta in [16].

Il fit dei dati è stato fatto usando le librerie ROOT. I risultati ottenuti sono riportati nella Tabella 1.

	CC		CC+BAO	
	CKG	$\Lambda$ CDM	CKG	$\Lambda$ CDM
$H_0$	$71.11 \pm 8.29$	$67.98 \pm 3.00$	$64.08 \pm 4.69$	$69.80 \pm 1.09$
$\Omega_{m,0}$	$0.3135 \pm 0.0569$	$0.3216 \pm 0.0587$	$0.3073 \pm 0.0410$	$0.2689 \pm 0.0178$
$\Omega_{\Lambda,0}$	$0.375 \pm 0.702$	$0.6784 \pm 0.0587$	$1.109 \pm 0.342$	$0.7311 \pm 0.0178$
$\Omega_{\text{eff},0}$	$0.311 \pm 0.704$	-	$-0.416 \pm 0.344$	-
$\chi^2$	14.4164	14.5758	30.4857	32.2018
$P_{\chi^2}$	99.26%	99.46%	99.79%	99.67%

**Tabella 1:** Tabella riportante i parametri di densità, fittati a partire dalle misure di  $H$  riportate nella Tabella B.1, con gli errori ad essi associati.

A sinistra sono riportati i valori conseguenti all'utilizzo dei dati ottenuti con il metodo dei cronometri cosmici (CC) mentre a destra (CC+BAO) quelli conseguenti all'utilizzo di tutti i dati. I valori di  $H_0$  sono riportati in:  $(\frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}})$ .

È anche poi riportato il  $\chi^2$  e l'associata probabilità che il discostamento dei dati dal modello sia dovuto a fluttuazioni statistiche.

È da notare il fatto che  $\Omega_{m,0} = \frac{8\pi G \rho_{m,0}}{3H_0^2}$  risulta sempre positivo, come ci si aspetterebbe, anche se questa condizione non è imposta durante il fit. La miglior stima del parametro  $\Omega_{\text{eff},0}$  risulta invece negativa se ottenuta a partire da tutti i dati. Come già detto in precedenza non vi è alcun motivo teorico che porti ad aspettarsi un valore positivo. Infatti questo parametro non è definito a partire da una densità di energia fisicamente presente, in quanto non è associato a  $T_{ab}$  ma a  $K_{ab}$ .

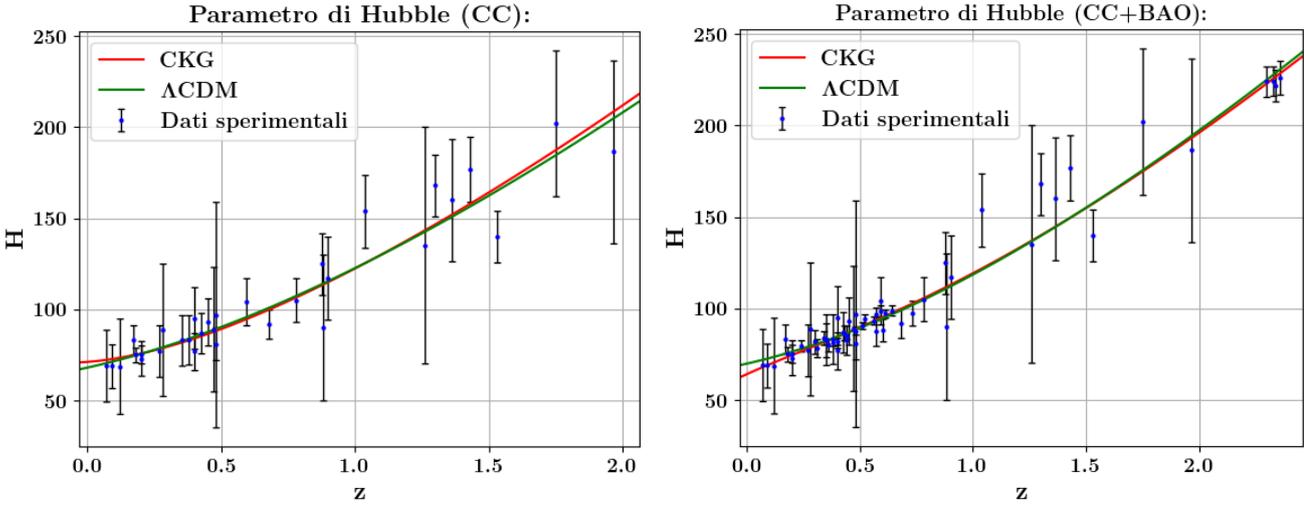
In  $\Lambda$ CDM il parametro  $\Omega_{\Lambda,0}$  è ottenuto come  $1 - \Omega_{m,0}$  e per questo motivo l'errore associato a questo parametro è uguale a quello associato a  $\Omega_{m,0}$ .

In CKG  $\Omega_{\text{eff},0} = 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}$  e per questo motivo l'errore di  $\Omega_{\text{eff},0}$  è pari alla somma in quadratura degli errori degli altri due parametri.

Nelle ultime righe della Tabella 1 è riportato il  $\chi^2$  misurato e la probabilità che la distribuzione  $\chi^2$  sia maggiore di questo valore. I risultati indicano che non vi è ragione di rifiutare l'ipotesi che il modello (3.2.2) descriva bene i dati. È da notare come il valore  $\Omega_{m,0}$  è vicino a quello atteso ( $\approx 0.3$ ) e non sembra cambiare significativamente rispetto a quello ottenuto con  $\Lambda$ CDM.

Osservando gli errori si può notare che, tra quelli determinati con il fit, il parametro con maggiore incertezza è  $\Omega_{\Lambda,0}$  nel caso della CKG. Inoltre si osserva, sempre nel caso della CKG, una elevata dipendenza di  $\Omega_{\Lambda,0}$  e  $\Omega_{\text{eff},0}$  dai dati con cui vengono fittati. Infatti i valori di questi parametri differiscono notevolmente a seconda che vengano utilizzati i dati CC o quelli CC+BAO. Pertanto, nell'ambito della gravità di Killing conforme, l'elevato errore di  $\Omega_{\Lambda,0}$  e  $\Omega_{\text{eff},0}$  assieme alla loro elevata dipendenza dal set di dati considerato, porta ad una difficoltà nell'ottenere informazioni anche basilari su questi parametri. Risulta per esempio incerto il segno di  $\Omega_{\text{eff},0}$ .

In Figura 6 sono riportati i grafici di  $H(z)$  ottenuti a partire dai parametri riportati in Tabella 1.



**Figura 6: Fit di  $H(z)$  nel caso  $\Lambda$ CDM e nel caso della gravità di Killing conforme (CKG). A sinistra la funzione fittata è stata ottenuta usando solo i dati presi con il metodo dei cronometri cosmici (CC), a destra il risultato è ottenuto tenendo in considerazione anche le misure BAO.**

Ho inoltre provato a fittare la funzione  $H^2$  con gli stessi dati sperimentali. I parametri così ottenuti risultavano analoghi a quelli precedentemente mostrati. Un'altra verifica che ho fatto è stato provare a calcolare un parametro di densità diverso da  $\Omega_{\text{eff},0}$  tramite la formula (2.3.49). Anche in questo caso, come ci si aspetterebbe, i risultati ottenuti sono risultati analoghi.

## Parametri cosmologici

Il parametro decelerazione (2.3.55), insieme al parametro di Hubble (2.2.17) fanno parte di una famiglia di parametri cosmologici che descrivono l'andamento del fattore di scala per tempi vicini al presente. Infatti, se si fa uno sviluppo di Taylor di  $a(t)$  centrato nel tempo  $t_0$  si ottiene:

$$a(t) = a_0 \left[ 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}j_0 H_0^3 (t - t_0)^3 + \frac{1}{4!}s_0 H_0^4 (t - t_0)^4 + \dots \right] \quad (3.2.3)$$

Con i parametri:

$$\begin{aligned} \text{parametro di Hubble:} \quad H &:= \frac{1}{a} \dot{a} \\ \text{parametro di decelerazione:} \quad q &:= \frac{1}{a} \ddot{a} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^{-2} \\ \text{parametro di jerk:} \quad j &:= \frac{1}{a} \dddot{a} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^{-3} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$\text{parametro di snap:} \quad s := \frac{1}{a} \text{iv}a \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^{-4} \quad (3.2.5)$$

Le definizioni dei parametri sovramenzionati sono state introdotte per la prima volta nell'articolo [17]. Da queste definizioni e da:  $(z + 1)^{-1} = \frac{a}{a_0}$  seguono immediatamente:

$$j = (1 + z) \frac{dq}{dz} + q(1 + 2q) \quad (3.2.6)$$

$$s = -(z + 1) \frac{dj}{dz} - j(2 + 3q) \quad (3.2.7)$$

Sfruttando queste equazioni insieme all'equazione (2.3.57) possiamo trovare le formule di questi parametri cosmologici per  $n = 4$  nella gravità di Killing conforme:

$$q = \frac{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \frac{1}{2}\Omega_{m,0}(1+z)^3 - \Omega_{\Lambda,0} - 2\Omega_{\text{eff},0}(1+z)^{-2}}{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}(1+z) + \Omega_{\text{eff},0}(1+z)^{-2}} \quad (3.2.8)$$

$$j = 1 + \frac{2\Omega_{r,0}(1+z)^4 - \Omega_k(1+z)^2 + 5\Omega_{\text{eff}}(1+z)^{-2}}{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{\text{eff}}(1+z)^{-2}} \quad (3.2.9)$$

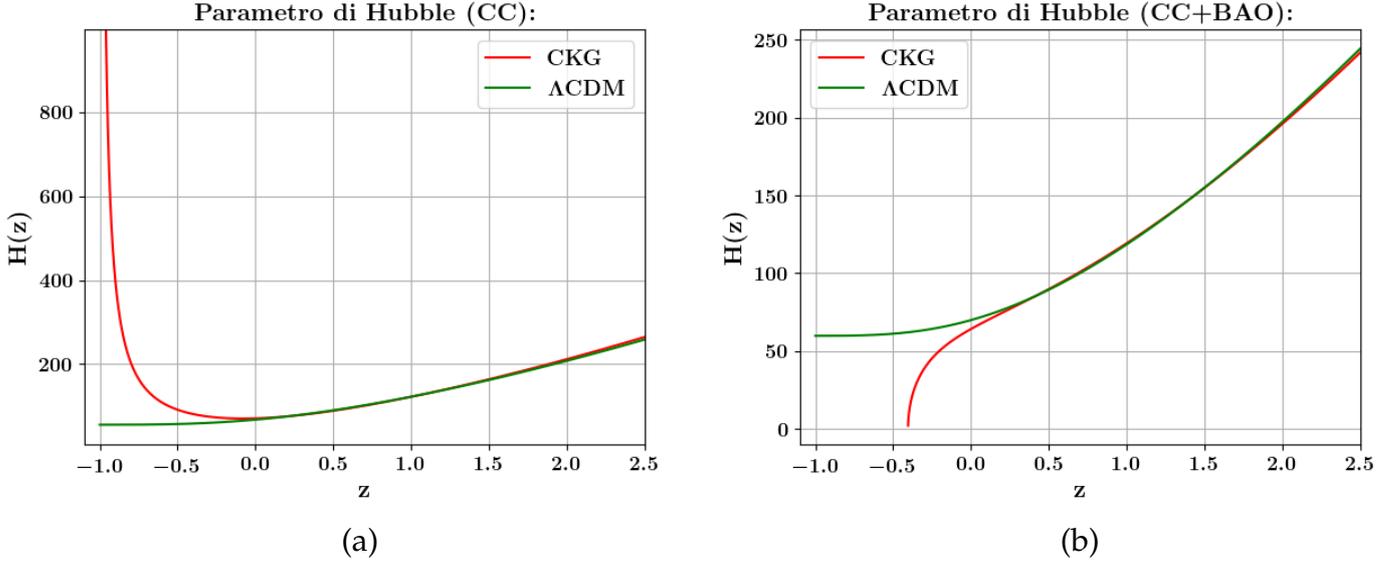
$$s = \frac{1}{2 \left[ \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{\text{eff},0}(1+z)^{-2} \right]^2} \cdot \left\{ \begin{aligned} & -30\Omega_{r,0}^2(1+z)^8 - 35\Omega_{m,0}\Omega_{r,0}(1+z)^7 - 7\Omega_{m,0}^2(1+z)^6 + \\ & -6\Omega_{k,0}(1+z)^2 \left( 4\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 \right) + \\ & -5\Omega_{\Lambda,0} \left( \Omega_{m,0}(1+z)^3 + 4\Omega_{r,0}(1+z)^4 \right) + 2\Omega_{\Lambda,0}^2 + \\ & + 8\Omega_{\text{eff},0}(1+z)^{-2} \left[ 2\Omega_{m,0}(1+z)^3 + 3\Omega_{k,0}(1+z)^2 + 5\Omega_{\Lambda,0} \right] + \\ & + 48\Omega_{\text{eff},0}^2(1+z)^{-4} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.10)$$

Per essere più generale possibile ho mostrato le formule mantenendo tutti i parametri di densità ( $\Omega_{I,0}$ ).

I grafici che verranno riportati successivamente sono fatti usando i valori dei parametri di densità ottenuti nella sezione precedente. Le formule a partire da cui farò i grafici sono quindi molto più semplici di quelle mostrate, in quanto considero  $\Omega_{k,0} = 0$ ,  $\Omega_{r,0} = 0$ .

I risultati ottenuti con i parametri di densità della CKG verranno comparati con quelli ottenuti a partire dai parametri di densità di  $\Lambda$ CDM.

Considerando anche i valori:  $-1 < z < 0$  si possono fare delle previsioni sul valore di questi parametri nel futuro, come risulta evidente considerando la formula (3.1.1).



**Figura 7:** Fit di  $H(z)$  nel caso  $\Lambda$ CDM e nel caso della gravità di Killing conforme (CKG). A sinistra la funzione fittata è stata ottenuta usando solo i dati presi con il metodo dei cronometri cosmici (CC), a destra il risultato è ottenuto tenendo in considerazione anche le misure BAO. Questo grafico corrisponde all'estensione della Figura 6 considerando anche l'intervallo  $-1 < z < 0$ .

I grafici riportati in Figura 7 sono l'estensione dei grafici mostrati nella Figura 6, considerando anche i valori futuri di  $H$  ( $-1 < z < 0$ ).

Iniziamo considerando il grafico ottenuto con CC+BAO. Il fit con tutte le misure di  $H(z)$  porta ad  $\Omega_{\text{eff},0} < 0$ , questo ha fatto sì che, come si vede nel grafico (b), la funzione  $H(z)$  abbia uno zero  $z^* = -0.404$ . Se si considera l'equazione (2.3.51) si verifica che  $H^2 < 0$  per  $z \in (-1, z^*)$ .

Questo significa che non sono possibili valori di  $z < z^*$ , ossia l'espansione dell'universo si arresterà dopo il tempo  $t^*$  in cui  $a(t^*) = \frac{a_0}{z^*+1}$ , in cui infatti vale  $H = 0$ . Usando il fatto che:

$$t^* = \int_0^{t^*} dt = \int_0^{a^*} \frac{da}{\dot{a}} = \int_{z^*}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z)H} \quad (3.2.11)$$

si trova che  $t^*$  è finito.

A partire dal momento  $t > t^*$  il tempo non è più esprimibile in funzione del redshift in maniera univoca poiché  $a(t)$  non è più una funzione monotona crescente (altrimenti avrei  $z > z^*$ ). Dovrà però continuare a valere (2.3.51). Ne conseguono 3 possibili scenari per  $t > t^*$ .

Il primo è che l'universo divenga statico e rimanga con un fattore di scala  $a \equiv a(t^*)$ .  $a \equiv a(t^*)$  infatti soddisfa identicamente l'equazione (2.3.51).

Il secondo possibile scenario è che l'universo segua una evoluzione temporale opposta a quella che lo ha caratterizzato nell'intervallo  $0 < t < t^*$ . Ciò ha come conseguenza un aumento di  $z$  (ossia di  $a$ ) al passare del tempo. Anche questa soluzione soddisfa l'equazione (2.3.51) poiché valgono:  $H(t^* + t) = -H(t^* - t)$ ,  $a(t^* + t) = a(t^* - t) \forall t \in (0, t^*)$ . Questa casistica prevede che al tempo  $t = 2t^*$  il fattore di scala si annulli

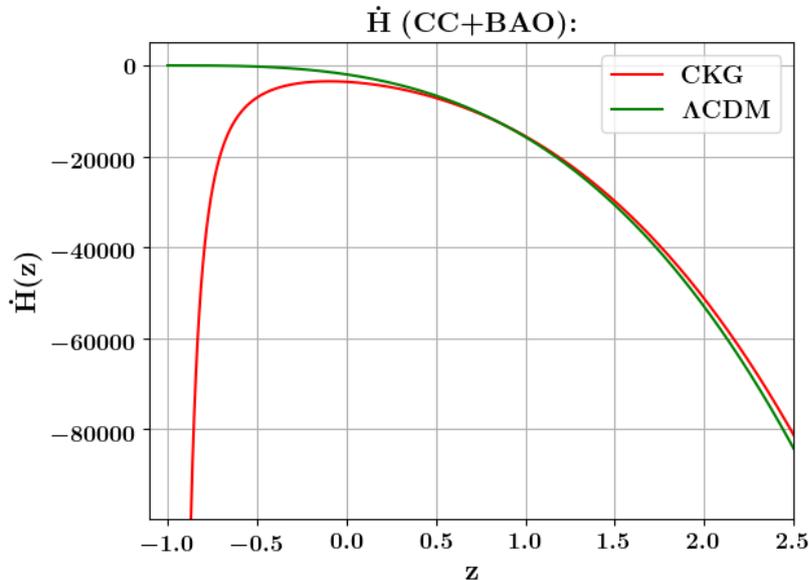
facendo avvenire lo scenario comunemente conosciuto come *Big Crunch*.

Un terzo caso può essere ottenuto se si uniscono le due soluzioni particolari appena presentate. In questo caso l'universo diviene statico al tempo  $t^*$  e dopo un certo intervallo di tempo  $\Delta t$  questo inizia a contrarsi con la legge opposta a quella seguita per  $t < t^*$ . Quest'ultimo caso è quello per cui:

$$\left\{ \begin{array}{ll} H = H_0 \sqrt{\left[ \sum_J \Omega_{J,0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(w_J+1)} + \Omega_{k,0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} \right]} & \text{se } t < t^* \\ H \equiv 0 & \text{se } t^* \leq t \leq t^* + \Delta t \\ H = -H_0 \sqrt{\left[ \sum_J \Omega_{J,0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(w_J+1)} + \Omega_{k,0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} \right]} & \text{se } t^* + \Delta t < t < 2t^* + \Delta t \end{array} \right. \quad (3.2.12)$$

Per i motivi che ora illustrerò ritengo non siano considerabili come soluzioni fisicamente accettabili il primo e il terzo scenario.

Si può fare il grafico della funzione  $\dot{H}$ , usando i parametri fittati, tramite l'equazione (2.3.50).



Da questo grafico si evince che  $\dot{H}$  non diverge in alcun punto  $z > -1$ , ma assume in  $z^* = -0.404$  un valore finito e non nullo. Se si vuole imporre continuità di  $\dot{H}$  in  $t = t^*$ , che equivale a chiedere la continuità di  $\ddot{a}$  in  $t^*$ , non risulta possibile incollare la soluzione  $a \equiv a^*$ , per cui  $\dot{H} \equiv 0$ , con la soluzione valida per  $t < t^*$ . In conclusione sembra che la conseguenza di aver ottenuto  $\Omega_{\text{eff},0} < 0$  sia la presenza del *Big Crunch* al tempo  $2t^*$ .

Questa soluzione è sostanzialmente diversa da quella che prevede  $\Lambda\text{CDM}$  in cui l'universo continua ad espandersi con una espansione accelerata per un tempo infinito.

Per i dati CC, come si vede dalla figura (a), il valore minimo assumibile da  $z$  è  $-1$ ,

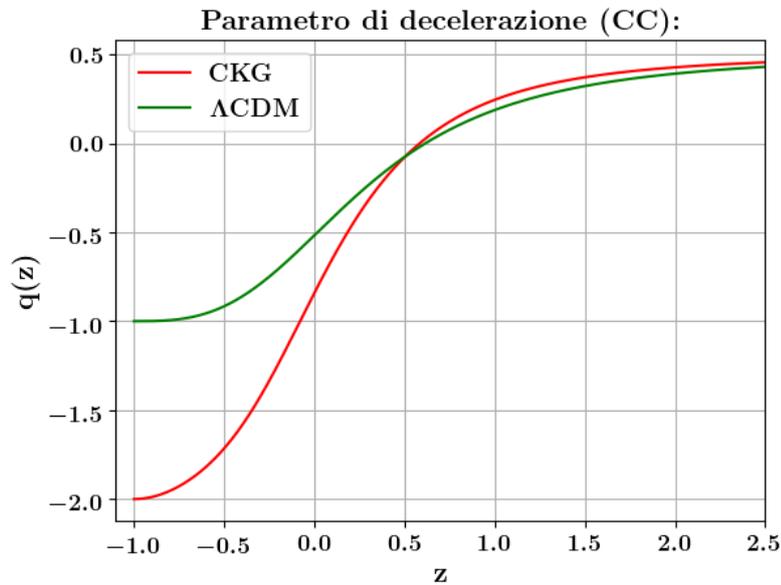
quindi l'universo si espande ad ogni tempo come previsto anche da  $\Lambda$ CDM.

Vi è tuttavia una differenza tra i due modelli, infatti nella gravità di Killing conforme, come si vede da (3.2.1),  $H \sim \frac{H_0}{1+z} \sqrt{\Omega_{\text{eff},0}}$  se  $z \rightarrow -1^+$ . Quindi il valore  $z = -1$  sarà raggiunto ad un tempo finito:  $t_{\text{rip}} = \int_{-1}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z)H}$ . L'universo impiega quindi un tempo finito ad assumere un fattore di scala  $a(t)$  infinito. Questa singolarità futura è conosciuta con il nome di *Big Rip*.

Nel modello  $\Lambda$ CDM invece:  $H \sim H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}$  se  $z \rightarrow -1^+$ , il che comporta che  $t_{\text{rip}} = \int_{-1}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z)H} = +\infty$ , quindi il *Big Rip* non avviene in un tempo finito e l'universo continua ad espandersi per sempre.

La presenza o assenza del *Big Rip* nelle precedenti teorie non dipende dall'assunzione che l'universo sia piatto né dall'aver trascurato il contributo della radiazione.

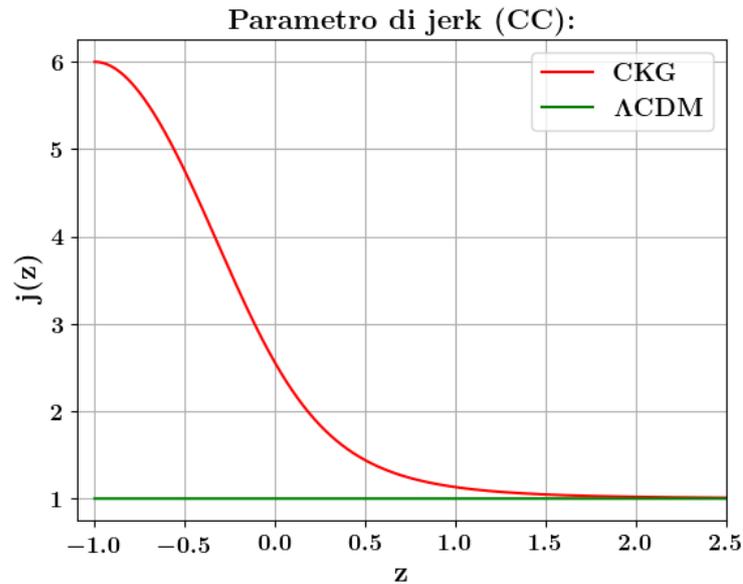
Da questo momento analizzo i restanti parametri cosmologici concentrandomi sui risultati prodotti dai dati CC.



Come si vede dalla definizione (2.3.55) il parametro di decelerazione ha segno opposto rispetto alla derivata seconda del fattore di scala. Sia nel caso CC della nostra teoria che in  $\Lambda$ CDM questo parametro assume sempre valori negativi (fase di accelerazione) per redshift minori di un determinato  $z_0$ . Il valore  $z_0$  corrisponde quindi al momento in cui l'universo passa da una espansione decelerata ad una accelerata. Il grafico di  $\Lambda$ CDM porta a dare una stima  $z_0 = 0.616$  mentre nella CKG  $z_0 = 0.584$ .

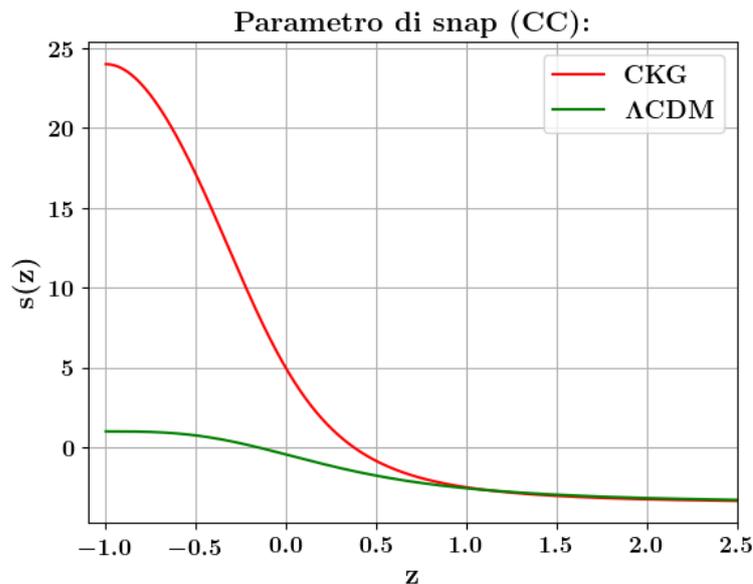
Nel caso della CKG l'espansione risulta avvenire con accelerazione maggiore, rispetto a quella predetta da  $\Lambda$ CDM, per l'epoca presente e per quelle future (a parità di  $z$ ). I valori del parametro di decelerazione al tempo presente nel caso  $\Lambda$ CDM e in quello CKG sono rispettivamente:  $q_0 = -0.517$  e  $q_0 = -0.841$ .

Per redshift elevati  $q(z)$  non differisce molto tra le due teorie .



Come si vede dall'equazione (3.2.9) in  $\Lambda$ CDM:  $j \equiv 1$ , indipendentemente dai risultati del fit. Sempre però osservando l'equazione (3.2.9) si nota che nella CKG questo non è più vero e l'andamento di questa funzione dipende dal valore di  $\Omega_{\text{eff},0}$ . Questo permette di avere differenze quantitativamente rilevanti tra il parametro di jerk di  $\Lambda$ CDM e CKG che potrebbero permettere di testare quest'ultima teoria.

Il parametro di jerk ha lo stesso segno di  $\ddot{a}$ , quindi entrambe le teorie sembrano prevedere un aumento del tasso di accelerazione dell'universo. A parità di redshift il tasso di crescita dell'accelerazione è maggiore nella stima CKG. I risultati sembrano inoltre indicare che il parametro di jerk aumenti con l'aumentare del tempo.



Per completezza è stato raffigurato anche il parametro di snap. Anche in questo caso  $\Lambda$ CDM e CKG hanno portato ad un andamento analogo per elevati redshift, mentre il valore del parametro si differenzia soprattutto per  $z$  bassi. Questo fatto è riscontrabile

anche in tutti i precedenti parametri cosmologici ottenuti a partire dalle misure CC.

## Equazione di stato dell'energia oscura

La teoria della gravità di Killing conforme cerca di spiegare il contributo del settore oscuro della cosmologia modificando le equazioni di campo della relatività generale. Nella sezione 2.3, all'interno della sottosezione **Cosmologia**, è stato dimostrato che questo contributo è equivalente a quello di due fluidi perfetti con equazioni di stato della forma (2.3.42) dove:  $w_\Lambda = -1$ ,  $w_{\text{eff}} = -\frac{n+1}{n-1}$  e con densità:  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ ,  $\rho_{\text{eff}} = -\frac{Ca^2}{16\pi G}$ .

Se nel contesto della gravità di Killing conforme si considera il contributo associato al settore oscuro come dovuto ad un'unica entità fittizia, cosa che viene fatta ricorrenemente in letteratura, allora si trova un coefficiente  $w_{\text{dark}}$  che dipende dal tempo. Le equazioni (2.3.46), (2.3.45) permettono infatti di ottenere:

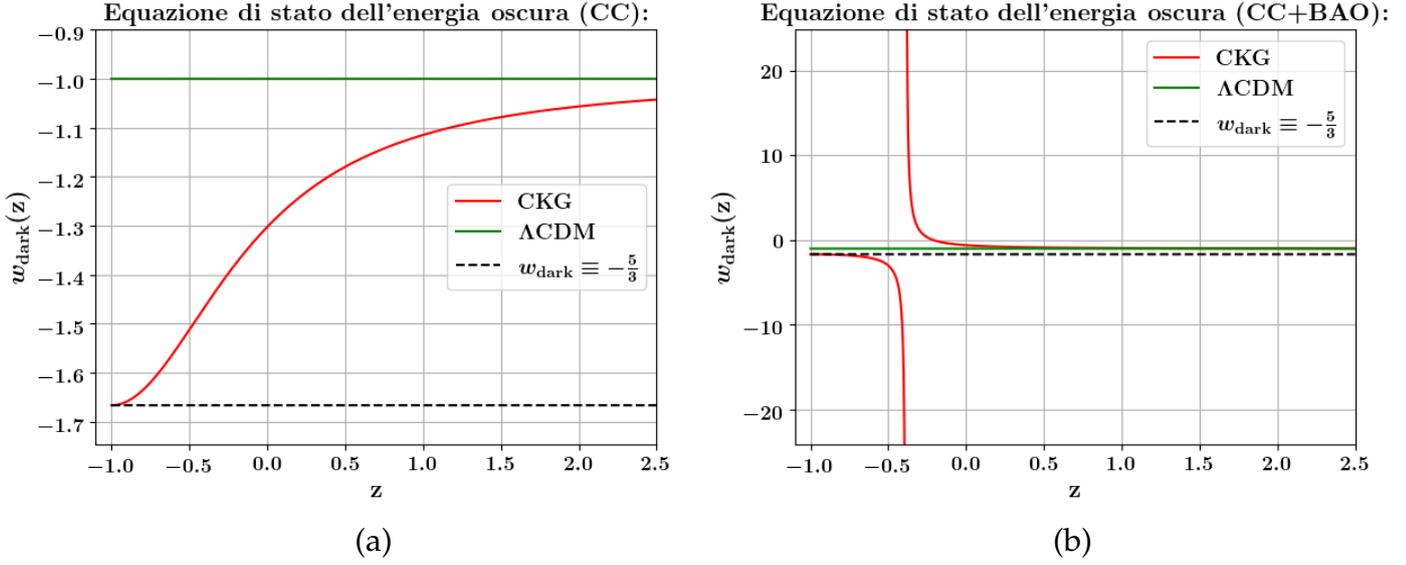
$$w_{\text{dark}} := \frac{p_{\text{dark}}}{\rho_{\text{dark}}} = -1 - \frac{2}{n-1} \frac{\Omega_{\text{eff},0}}{\Omega_{\Lambda,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_{\text{eff},0}} \quad (3.2.13)$$

Si può notare che  $w_{\text{dark}} \rightarrow -1 = w_\Lambda$  per  $a \rightarrow 0$ . Questo corrisponde ad uno scenario in cui la componente di energia oscura dominante è la costante cosmologica. Se invece  $a \rightarrow +\infty$  allora  $w_{\text{dark}} \rightarrow \frac{n+1}{n-1}$ , che corrisponde al coefficiente  $w_{\text{eff}}$ . L'aggiunta di questo contributo è quello che differenzia la gravità di Killing conforme dalla relatività generale con costante cosmologica.

Posso quindi usare i valori dei parametri densità, ottenuti a partire dal fit di  $H(z)$  e riportati nella Tabella 1, per fare i grafici di  $w(z)$  nel caso RW ( $n = 4$ ). Infatti, per varietà di tipo RW, è possibile usare la formula (3.1.1), tramite cui l'equazione (3.2.13) diventa:

$$w_{\text{dark}}(z) = -1 - \frac{2}{3} \frac{\Omega_{\text{eff},0}}{\Omega_{\Lambda,0}(1+z)^2 + \Omega_{\text{eff},0}} \quad (3.2.14)$$

I grafici ottenuti a partire da questa relazione sono riportati in Figura 8.



**Figura 8: Grafico di  $w_{\text{dark}}(z)$  nel caso  $\Lambda\text{CDM}$  e nel caso della gravità di Killing conforme (CKG). Il grafico a sinistra è stato realizzato usando i parametri di densità ottenuti tramite i dati presi con il metodo dei cronometri cosmici (CC), a destra i parametri usati sono invece ottenuti tenendo in considerazione anche le misure BAO. Il valore dei parametri è riportato nella Tabella 1.**

Come si nota nella Figura 8 il modello  $\Lambda\text{CDM}$  modella l'energia oscura come un fluido perfetto con  $w \equiv -1$ . Non vi è quindi una dipendenza di  $w_{\text{dark}}$  dal redshift. Da questo momento mi concentrerò unicamente sul caso della gravità di Killing conforme (CKG).

Come già accennato, il valore di  $w_{\text{dark}}(z)$  agli estremi del dominio sono  $w_{\Lambda} = -1$  e  $w_{\text{eff}} = -\frac{5}{3}$ .

Nel caso CC, mostrato dal grafico (a),  $w_{\text{dark}}(z)$  è una funzione continua con codominio  $-\frac{5}{3} \leq w_{\text{dark}} < -1$ .

Il grafico (b) presenta, ad un redshift  $\tilde{z}$ , una discontinuità in cui la funzione diverge. Questo corrisponde al momento in cui la quantità  $\rho_{\text{eff}}(z)$ , la quale è negativa, ha lo stesso modulo di  $\rho_{\Lambda}(z)$  (positiva), implicando così  $\rho_{\text{dark}}(\tilde{z}) = 0$ . Questo grafico è infatti realizzato a partire dai parametri di densità ottenuti nel caso CC+BAO, in cui  $\Omega_{\text{eff},0}$  è un valore negativo. Guardando la formula (3.2.14) è evidente che  $\tilde{z} = \sqrt{-\frac{\Omega_{\text{eff},0}}{\Omega_{\Lambda,0}}} - 1$ . Questa equazione ammette una soluzione solo quando  $\Omega_{\Lambda,0}$  e  $\Omega_{\text{eff},0}$  hanno segno discorde (come nel caso CC+BAO). Nel caso CC+BAO si ottiene così:  $\tilde{z} = -0.387$ .

È da notare che questo valore di  $z$  viene raggiunto in un tempo finito in quanto  $z^* = -0.404 < -0.387 = \tilde{z}$ . Il valore  $z^*$  menzionato corrisponde al momento futuro in cui, secondo i parametri di densità ottenuti tramite CC+BAO, l'espansione dell'universo si arresta. Per ulteriori spiegazioni a riguardo si legga la sottosezione [Parametri cosmologici](#).

È possibile stimare il valore di  $w_{\text{dark}}$  al tempo presente, infatti utilizzando (3.2.14) si ottiene  $w_{\text{dark},0} := w_{\text{dark}}(z = 0) = -1 - \frac{2}{3} \frac{\Omega_{\text{eff},0}}{\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{\text{eff},0}}$ . Con questa formula si ottengono:  $(w_{\text{dark},0})_{\text{CC}} = -1.302$ ,  $(w_{\text{dark},0})_{\text{CC+BAO}} = -0.599$ .

## Commento

Il fit ha prodotto risultati inconcludenti per la teoria CKG a causa delle elevate incertezze associate ai parametri di densità. Infatti se si usano i parametri di densità ottenuti a partire dai dati BAO+CC si conclude che l'universo è destinato a concludersi con il *Big Crunch*, mentre se si usano i dati CC si giunge alla conclusione che l'universo terminerà con il *Big Rip*. Gli errori inoltre non sembrano escludere la possibilità che  $\Omega_{\text{eff},0} = 0$ , valore per cui il modello da me studiato coincide con  $\Lambda$ CDM.

Al fine di riuscire ad ottenere previsioni cosmologiche a partire dalla teoria di Killing conforme, o eventualmente falsificarla, sono necessarie analisi di dati basate su tecniche più avanzate che permettano di ottenere i parametri  $\Omega_{I,0}$  con maggiore precisione.

I risultati riportati nella sottosezione [Parametri cosmologici](#), all'interno della sezione [3.2](#), sono stati ottenuti in maniera indipendente da quelli presentati nell'articolo [\[11\]](#). La base di partenza è stato lo stesso set di dati (Tabella [B.1](#)) e le conclusioni risultano in buona parte sovrapponibili.

# Appendice

# A | Dimostrazione del teorema 2.19

## Teorema 2.19.

In  $n > 2$  siano  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Lambda_0$  con  $\mathcal{A} \neq 0$  e sia  $\mathcal{C}_{ab}$  tale che: 
$$\begin{cases} \mathcal{C}_{ab} = \mathcal{A}u_a u_b + \mathcal{B}g_{ab} \\ u^k u_k = -1 \end{cases}$$

Allora:

$$\mathcal{C}_{ab} \text{ è un tensore di Codazzi} \iff \begin{cases} \nabla_a u_b = \varphi(g_{ab} + u_a u_b) - u_a \dot{u}_b & \text{(A.1a)} \\ \nabla_a \mathcal{A} = -u_a \dot{\mathcal{A}} - \dot{u}_a \mathcal{A} & \text{(A.1b)} \\ \nabla_a \mathcal{B} = -u_a \dot{\mathcal{B}} & \text{(A.1c)} \\ \varphi = -\frac{\dot{\mathcal{B}}}{\mathcal{A}} & \text{(A.1d)} \end{cases}$$

E valgono le seguenti proprietà:

- a)  $\omega_{ab} \equiv 0$
- b)  $\sigma_{ab} \equiv 0$
- c)  $\nabla_a \varphi = -u_a \dot{\varphi}$
- d)  $\varphi = \frac{\theta}{n-1}$

### Dimostrazione:

Il fatto che il tensore di  $\mathcal{C}_{ab}$  abbia la forma di fluido perfetto ne garantisce la simmetricità. Dimostrare che  $\mathcal{C}_{ab}$  è un tensore di Codazzi è quindi equivalente a dimostrare:

$$\nabla_{[a} \mathcal{C}_{b]c} = 0 \quad \text{(A.2)}$$

Dimostro prima la direzione ( $\Rightarrow$ ) e nel fare ciò otterrò le proprietà a), b), c) e d).

( $\Rightarrow$ ):

L'equazione (A.2) può essere scritta esplicitamente come:

$$(\nabla_{[a} \mathcal{A})u_{b]}u_c + \mathcal{A}(\nabla_{[a} u_{b]})u_c + \mathcal{A}u_{[b} \nabla_a]u_c + \nabla_{[a} \mathcal{B}g_{b]c} = 0 \quad \text{(A.3)}$$

Contraendo questa equazione con  $u^c$  si ottiene:

$$-(\nabla_{[a} \mathcal{A})u_{b]} - \mathcal{A}\nabla_{[a} u_{b]} + \nabla_{[a} \mathcal{B}u_{b]} = 0 \quad \text{(A.4)}$$

Dove si è sfruttato il fatto che:

$$0 = \frac{1}{2}[\nabla_a(-1)] = \frac{1}{2}[\nabla_a(u^c u_c)] = u^c \nabla_a u_c \quad \text{(A.5)}$$

Se si contrae l'equazione (A.4) con  $u^b$ , utilizzando (A.5) si ottiene:

$$\nabla_a(\mathcal{A} - \mathcal{B}) = -(\dot{\mathcal{A}} - \dot{\mathcal{B}})u_a - \mathcal{A}\dot{u}_a \quad (\text{A.6})$$

L'utilizzo di (A.6) all'interno di (A.4), insieme all'ipotesi  $\mathcal{A} \neq 0$ , permette di ottenere la proprietà a).

La contrazione di (A.3) con  $g^{bc}$  e l'utilizzo di (A.5) porta a ottenere:

$$\nabla_a[(n-1)\mathcal{B} - \mathcal{A}] - \mathcal{A}(\dot{u}_a - u_a\theta) - \dot{\mathcal{A}}u_a = 0 \quad (\text{A.7})$$

Contrarre questa equazione con  $u^a$  insieme a (A.5), restituisce la proprietà d), nel caso in cui si definisca  $\varphi$  secondo l'equazione (A.1d). Si può quindi usare d) all'interno di (A.7), il che permette di trovare:

$$\nabla_a[(n-1)\mathcal{B} - \mathcal{A}] + [(n-1)\dot{\mathcal{B}} - \dot{\mathcal{A}}]u_a - \dot{\mathcal{A}}\dot{u}_a = 0 \quad (\text{A.8})$$

Usando (A.6) all'interno di (A.8) e sfruttando l'ipotesi  $n \neq 2$  si trova (A.1c). Se si mette a sistema (A.1c) con (A.6) si ottiene (A.1b). Usando la scomposizione di  $\nabla_a u_b$ , (Teorema 2.5) all'interno di (A.3) e ricordando a), (A.1b) e (A.1c) si trova:  $u_a\sigma_{bc} = u_b\sigma_{ac}$ .

La contrazione di quest'ultima formula con  $u^a$  insieme alla proprietà (2.2.14) garantisce la proprietà b).

Le proprietà a), b) e d) fanno sì che la decomposizione di  $\nabla_a u_b$ , presentata all'interno del Teorema 2.5, diventi l'equazione (A.1a). Ho così trovato l'implicazione: ( $\Rightarrow$ )

Usando le equazioni (A.1a), (A.1c), (A.1d), il fatto che  $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f \quad \forall f \in \Lambda_0$  e, successivamente, le equazioni (A.1b) e (A.5) si trova:

$$\nabla_a \varphi = \left( \frac{\ddot{\mathcal{B}}}{\mathcal{A}} - \frac{\dot{\mathcal{B}}\dot{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}^2} \right) u_a = -u_a \dot{\varphi} \quad (\text{A.9})$$

Che è la proprietà c).

( $\Leftarrow$ ):

La dimostrazione è immediata, basta infatti verificare che se si usano le equazioni: (A.1a), (A.1b), (A.1c), (A.1d) all'interno di (A.3) si ottiene una identità.  $\square$

## B | Misure di H(z)

CC			BAO		
$z$	$H(z)$	$\sigma_{H(z)}$	$z$	$H(z)$	$\sigma_{H(z)}$
0.070	69.0	19.6	0.24	79.69	2.99
0.090	69	12	0.30	81.70	6.22
0.120	68.6	26.2	0.31	78.18	4.74
0.170	83	8	0.34	83.80	3.66
0.1791	75	4	0.35	82.7	9.1
0.1993	75	5	0.36	79.94	3.38
0.200	72.92	9.60	0.38	81.5	1.9
0.270	77	14	0.40	82.04	2.03
0.280	88.8	36.6	0.43	86.45	3.97
0.3519	83	14	0.44	82.6	7.8
0.3802	83.0	13.5	0.44	84.81	1.83
0.400	95	17	0.48	87.79	2.03
0.4004	77	10.2	0.51	90.4	1.9
0.4247	87.1	11.2	0.52	94.35	2.64
0.4497	92.8	12.9	0.56	93.34	2.30
0.470	89	34	0.57	87.6	7.8
0.4783	80.9	9.0	0.57	96.8	3.4
0.480	97	62	0.59	98.48	3.18
0.593	104	13	0.60	87.9	6.1
0.6797	92	8	0.61	97.3	2.1
0.7812	105	12	0.64	98.82	2.98
0.8754	125	17	0.73	97.3	7.0
0.880	90	40	2.30	224.0	8.6
0.900	117	23	2.33	224	8
1.037	154	20	2.34	222.0	8.5
1.260	135	65	2.36	226.0	9.3
1.300	168	17			
1.363	160.0	33.6			
1.430	177	18			
1.530	140	14			
1.750	202	40			
1.965	186.5	50.4			

Tabella B.1: Misure di  $H(z)$  ( $\frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$ ), a sinistra quelle ottenute con il metodo dei cronometri cosmici (CC), a destra quelle ottenute con il metodo delle oscillazioni acustiche barioniche (BAO).

## Bibliografia

- [1] A. Barnes. Vacuum static spherically symmetric spacetimes in harada's theory, 2023. URL <https://arxiv.org/abs/2309.05336>.
- [2] A. Barnes. Spherically symmetric electrovac spacetimes in conformal killing gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 41(15):155007, jul 2024. doi: 10.1088/1361-6382/ad5c33. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ad5c33>.
- [3] G. Clément and K. Nouicer. Spherical symmetric solutions of conformal killing gravity: black holes, wormholes, and sourceless cosmologies. *Classical and Quantum Gravity*, 41(16):165005, jul 2024. doi: 10.1088/1361-6382/ad5f24. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ad5f24>.
- [4] D. J. Eisenstein, I. Zehavi, D. W. Hogg, R. Scoccimarro, M. R. Blanton, R. C. Nichol, R. Scranton, H.-J. Seo, M. Tegmark, Z. Zheng, S. F. Anderson, J. Annis, N. Bahcall, J. Brinkmann, S. Burles, F. J. Castander, A. Connolly, I. Csabai, M. Doi, M. Fukugita, J. A. Frieman, K. Glazebrook, J. E. Gunn, J. S. Hendry, G. Hennessey, Z. Ivezić, S. Kent, G. R. Knapp, H. Lin, Y.-S. Loh, R. H. Lupton, B. Margon, T. A. McKay, A. Meiksin, J. A. Munn, A. Pope, M. W. Richmond, D. Schlegel, D. P. Schneider, K. Shimasaku, C. Stoughton, M. A. Strauss, M. SubbaRao, A. S. Szalay, I. Szapudi, D. L. Tucker, B. Yanny, and D. G. York. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, 633(2):560, nov 2005. doi: 10.1086/466512. URL <https://dx.doi.org/10.1086/466512>.
- [5] D. J. Eisenstein, H.-J. Seo, and M. White. On the robustness of the acoustic scale in the low-redshift clustering of matter. *The Astrophysical Journal*, 664(2):660, aug 2007. doi: 10.1086/518755. URL <https://dx.doi.org/10.1086/518755>.
- [6] E. Gaztañaga, A. Cabré, and L. Hui. Clustering of luminous red galaxies – iv. baryon acoustic peak in the line-of-sight direction and a direct measurement of  $h(z)$ . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 399(3):1663–1680, 2009. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15405.x>. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1365-2966.2009.15405.x>.
- [7] J. Harada. Emergence of the cotton tensor for describing gravity. *Phys. Rev. D*, 103:L121502, Jun 2021. doi: 10.1103/PhysRevD.103.L121502. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.L121502>.
- [8] J. Harada. Dark energy in conformal killing gravity. *Phys. Rev. D*, 108:104037, Nov 2023. doi: 10.1103/PhysRevD.108.104037. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.108.104037>.
- [9] J. Harada. Gravity at cosmological distances: Explaining the accelerating expansion without dark energy. *Physical Review D*, 108(4), Aug. 2023. ISSN 2470-0029. doi: 10.1103/physrevd.108.044031. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.108.044031>.

- [10] C. A. Mantica and L. G. Molinari. Note on harada's conformal killing gravity. *Phys. Rev. D*, 108:124029, Dec 2023. doi: 10.1103/PhysRevD.108.124029. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.108.124029>.
- [11] C. A. Mantica and L. G. Molinari. Conformal killing cosmology: Geometry, dark sector, growth of structures, and a big rip. *Phys. Rev. D*, 110:064041, Sep 2024. doi: 10.1103/PhysRevD.110.064041. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.110.064041>.
- [12] C. A. Mantica and L. G. Molinari. Conformal killing gravity in static spherically symmetric spacetimes. *Phys. Rev. D*, 110:044025, Aug 2024. doi: 10.1103/PhysRevD.110.044025. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.110.044025>.
- [13] C. A. Mantica and L. G. Molinari. Friedmann equations in the codazzi parametrization of cotton and extended theories of gravity and the dark sector. *Phys. Rev. D*, 109:044059, Feb 2024. doi: 10.1103/PhysRevD.109.044059. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.109.044059>.
- [14] M. Moresco, A. Cimatti, R. Jimenez, L. Pozzetti, G. Zamorani, M. Bolzonella, J. Dunlop, F. Lamareille, M. Mignoli, H. Pearce, P. Rosati, D. Stern, L. Verde, E. Zucca, C. Carollo, T. Contini, J.-P. Kneib, O. L. Fèvre, S. Lilly, V. Mainieri, A. Renzini, M. Scodeggio, I. Balestra, R. Gobat, R. McLure, S. Bardelli, A. Bongiorno, K. Caputi, O. Cucciati, S. de la Torre, L. de Ravel, P. Franzetti, B. Garilli, A. Iovino, P. Kampczyk, C. Knobel, K. Kovač, J.-F. L. Borgne, V. L. Brun, C. Maier, R. Pelló, Y. Peng, E. Perez-Montero, V. Presotto, J. Silverman, M. Tanaka, L. Tasca, L. Tresse, D. Vergani, O. Almaini, L. Barnes, R. Bordoloi, E. Bradshaw, A. Cappi, R. Chuter, M. Cirasuolo, G. Coppa, C. Diener, S. Foucaud, W. Hartley, M. Kamionkowski, A. Koekemoer, C. López-Sanjuan, H. McCracken, P. Nair, P. Oesch, A. Stanford, and N. Welikala. Improved constraints on the expansion rate of the universe up to  $z = 1.1$  from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(08):006, aug 2012. doi: 10.1088/1475-7516/2012/08/006. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2012/08/006>.
- [15] G. S. Sharov and V. O. Vasiliev. How predictions of cosmological models depend on hubble parameter data sets. *arXiv.org*, 2018. ISSN 2331-8422. URL <https://arxiv.org/abs/1807.07323>.
- [16] Tomasetti, E., Moresco, M., Borghi, N., Jiao, K., Cimatti, A., Pozzetti, L., Carnall, A. C., McLure, R. J., and Pentericci, L. A new measurement of the expansion history of the universe at  $z = 1.26$  with cosmic chronometers in vandels. *AA*, 679:A96, 2023. doi: 10.1051/0004-6361/202346992. URL <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202346992>.
- [17] M. Visser. Jerk, snap and the cosmological equation of state. *Classical and Quantum Gravity*, 21(11):2603, apr 2004. doi: 10.1088/0264-9381/21/11/006. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/21/11/006>.
- [18] R. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 2010. ISBN 9780226870373. URL <https://books.google.it/books?id=9S-hzg6-moYC>.

## Ringraziamenti

Tengo a esprimere la mia gratitudine al professor Luca G. Molinari e al dottorando Carlo A. Mantica. Li ringrazio, in primo luogo, per avermi proposto questo argomento che si è rivelato estremamente stimolante e, in secondo luogo, per la disponibilità da essi mostrata nei miei confronti.

Vorrei esprimere la mia gratitudine anche a tutti coloro che mi sono stati vicini in questi ultimi tre anni.

Un ringraziamento speciale va alla mia famiglia per il sostegno che mi hanno mostrato. Tengo in particolare a ringraziare i miei genitori Andrea, Lucia e mia sorella Mara. Un grazie va anche verso tutti gli amici e colleghi studenti con cui ho condiviso questo percorso universitario. Essi sono stati essenziali nel mantenermi motivato e interessato fornendo sempre nuovi spunti di riflessione. In particolare tengo a ringraziare Edoardo, Gabriele C., Gabriele F., Ivan e Leo.

