

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
Prova scritta del 26 giugno 2012

Esercizio 1

Per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ la funzione

$$I(k) = \int_R \frac{dz}{\pi} \frac{e^{kx}}{1 + e^{2z}}$$

(R è il rettangolo di vertici $-a$, a , $a + i\pi$, $-a + i\pi$) è uguale a 1?

Esercizio 2

Scrivere la parte principale dello sviluppo di Laurent centrato su $z = 1$ della funzione

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)(1-z)^2}$$

Qual'è l'anello di convergenza dello sviluppo di Laurent?.

Esercizio 3

Calcolare la norma in $L^1(0, 1)$ e in $L^2(0, 1)$ della funzione $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(x) = \frac{1}{1 + ix}$$

Quale norma è maggiore? La relazione dipende dalla funzione scelta?

Esercizio 4

Calcolare la derivata della distribuzione

$$\langle f | \varphi \rangle = \int_0^\infty dx |x^2 - 1| \varphi(x), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$