Lezione 3
Espressioni. Polinomi

1. Espressioni

Diamo per scontato che sia noto a tutti che cosa si intende, in Matematica, parlando di **espressione.** Illustriamo l'idea con qualche esempio.

Esempi 3.1 Sono espressioni:

- $(-0.7 + \frac{1}{3})^4 - \sqrt[3]{2} \cdot \dfrac{3^4 - 2^2}{(1 - \mathrm{Log}5)}$
- $2 - b^2$
- $(a + 4)(b - x)$
- $(x + y\mathrm{Log}3)^2$
- $\dfrac{3 + a}{x^2 + 1}$
- $\sqrt{x^2 + y^2}$
- $\left(x^2 - 3yx + \sqrt{7}a\right)^{3/5} + \dfrac{1}{2}$
- $2^x - 5y$
- $2\mathrm{Log}(1 + x^2) - \dfrac{2}{4 + x^6}$.

Invece

- $1 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10^2} + ... + \dfrac{1}{10^n} + ...$ (dove si sottointende che si continuano ad aggiungere potenze di $\dfrac{1}{10}$, senza mai fermarsi) *non è* una espressione, poiché in un'espressione deve comparire solo un numero finito di operazioni;
- $x + 1 = 0$ *non è* una espressione, poiché in questa scrittura compare il simbolo di uguaglianza tra due espressioni;
- $x > 5$ *non è* una espressione, poiché in questa scrittura compare il simbolo di disuguaglianza tra due espressioni.

Le lettere che compaiono in un'espressione vengono di solito chiamate:

- **costanti**, se nell'espressione hanno un valore fisso, anche se non esplicitato;
- **variabili**, in caso contrario.

Ad esempio, in Fisica si scrive l'espressione gt per esprimere la velocità di un corpo puntiforme sottoposto all'accelerazione di gravità g (costante) al variare dell'istante di tempo t (variabile).

Già nelle due lezioni precedenti sono state usate semplici espressioni, ad esempio, per scrivere le frazioni o le potenze in forma generale e poter enunciare le loro proprietà: come si sa, per applicare le formule così trovate basta sostituire a ciascuna lettera, ogni volta che compare in una stessa espressione, lo stesso valore numerico.
Questo è il modo con cui si calcola il valore di un'espressione una volta attribuiti dei valori alle lettere in essa contenute. È però importante notare che un'espressione *non sempre ha significato per ogni valore assunto dalle variabili* coinvolte, come si vede negli esempi successivi.

Esempi 3.2

- $1/a$ non ha significato per $a = 0$ (vedi Lezione 1).
- $\dfrac{\sqrt{x}}{y}$ non ha significato per $x < 0$, né per $y = 0$ (vedi Lezioni 1 e 2).
- $\mathrm{Log}(x) + \sqrt[4]{ab^2}$ non ha significato per $x \leq 0$, né per $a < 0$ (vedi Lezione 2).
- $x^{\sqrt{2}}$ non ha significato per $x \leq 0$ (vedi Lezione 2).
- $x^{\sqrt{2}} + (-x)^{\sqrt[3]{5}}$ non ha significato per alcun valore di x, poiché x non può essere contemporaneamente positivo e negativo.

Un po' di cautela. Nella lezione su potenze e logaritmi, abbiamo incontrato proprietà di cui si sottolineava che sono valide solo se certe quantità sono > 0.
Ritorniamo su alcune di esse.

1. Un'espressione come $\sqrt{a^2b}$ è definita, come abbiamo appena ricordato, per ogni valore di a ma solo se $b \geq 0$: ma possiamo scriverla in modo più semplice? Le proprietà delle potenze dicono che $\sqrt{a^2b} = (a^2b)^{1/2} = (a^2)^{1/2} \cdot (b)^{1/2}$ e che se $a \geq 0$ si può scrivere $(a^2)^{1/2} = a$. Questo è falso se $a < 0$, poiché $(a^2)^{1/2} > 0$. Possiamo però osservare che $a^2 = |a|^2$, poiché la potenza pari di qualunque numero è ≥ 0 e che $|a|$ è sempre ≥ 0: dunque
$$\sqrt{a^2b} = |a| \cdot b^{1/2}.$$

2. Viceversa, l'espressione $a\sqrt{b}$, definita per $b \geq 0$, può essere scritta come un unico radicale, ma ancora una volta dobbiamo ricordare che a può essere negativo e in questo caso anche $a\sqrt{b}$ lo è, mentre $\sqrt{a^2b}$ è sicuramente ≥ 0.

   Quindi siamo costretti a distinguere i due casi:
$$a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b} & \text{se } a \geq 0 \\ -\sqrt{a^2b} & \text{se } a < 0 \end{cases} .$$

3. L'espressione $\log_a x^2$ è definita per ogni valore di $x \neq 0$, poiché $x^2 \geq 0$. Ma l'uguaglianza $\log_a x^2 = 2\log_a x$ vale solo se $x > 0$, come abbiamo visto enunciando le proprietà dei logaritmi! Se di x si sa solo che è $\neq 0$, l'uguaglianza corretta è
$$\log_a x^2 = 2\log_a |x| .$$

2. Monomi e polinomi

Ci occupiamo ora di alcune tra le espressioni più semplici.

Definizione 3.3 Si dice **monomio** un'espressione nella quale le lettere e i numeri compaiono collegati fra loro solo dall'operazione di prodotto.

Delle seguenti espressioni:

$$\sqrt{3}d^2ax, \qquad 7x^2y^{-1}, \qquad 4a^{\frac{2}{3}}, \qquad 3x^2+5x-1, \qquad \frac{2xy+3y^2}{1+x^2}, \qquad \sqrt{a^4+\frac{2}{3}xy}.$$

solo la prima è un monomio: infatti in essa compare solo il prodotto di un numero per alcune potenze a esponente intero positivo (che sono definite come prodotti ripetuti). Ci atteniamo alla consuetudine di scrivere i monomi in modo che nel prodotto compaia un solo numero e che ogni lettera compaia una sola volta, elevata ad un'opportuna potenza: il monomio $3bya2xy$ si scriverà ad esempio $6by^2ax$ o (ordinando alfabeticamente le lettere [1]) $6abxy^2$.

Il numero che compare nel monomio è detto **coefficiente del monomio**. L'esponente di una lettera che compare nel monomio è detto **grado del monomio rispetto a** quella lettera. La somma degli esponenti di tutte le lettere che compaiono nel monomio è detta **grado del monomio.**

Ad esempio il monomio $12ax^2y^5$ ha

- coefficiente 12;
- grado (totale) 8;
- grado 1 rispetto alla a, 2 rispetto alla x, 5 rispetto alla y.

ATTENZIONE

- Anche 12 è un monomio, di grado zero rispetto ad ogni lettera! Più in generale, ogni numero reale, compreso 0, può essere pensato, quando serve, come un monomio.
- Il coefficiente del monomio ax^2y^5 è 1.
- Solo il monomio 0 ha coefficiente 0.

Molte leggi fisiche sono uguaglianze nelle quali il valore di una certa grandezza è espresso come un monomio le cui lettere rappresentano i valori di altre grandezze (in opportune unità di misura) :
$F = m \cdot a$ (forza esercitata su un punto di massa m sottoposto all'accelerazione a).
$s = \frac{1}{2}a \cdot t^2$ (spazio percorso nel moto uniformemente accelerato dopo un tempo t).
$E = m \cdot c^2$ (legge di Einstein).

[1] Non è obbligatorio che in un monomio le lettere compaiano in un certo ordine, visto che le lettere rappresentano numeri e che il prodotto di due numeri è commutativo. Se però entrano in giuoco due o più monomi, ordinare alfabeticamente le lettere può essere un buon sistema per riconoscere monomi con ugual parte letterale (usualmente detti **monomi simili**).

Definizione 3.4 Si dice **polinomio** ogni somma di monomi. (In particolare anche i monomi sono polinomi). Per **grado del polinomio** si intende il più alto fra i gradi dei monomi che vi compaiono.

Ad esempio

$$3a^2x^4 + 2.1x^3 + 5x^2y^7, \qquad b^3ax^2 + 1 + xb, \qquad 3x^4 + (\mathrm{Log}2)x^3 - 5x^2 + x - 7$$

sono polinomi rispettivamente di nono, sesto e quarto grado.

Invece *non sono polinomi*:

$$11x^2y + 3xy^{-1} + 7, \qquad \frac{1}{1+x^2}, \qquad x^{6/5} - 6ax + 1.$$

È ben noto come si fanno la **somma** e il **prodotto** di due polinomi. Ricordiamo la procedura su qualche esempio:

Esempi 3.5

- $(3a^2x^4 - x^3 + 5x^2y) + (2x^3 - 4x^2y + x^2) = 3a^2x^4 + x^3 + x^2y + x^2$
- $x(xy + 2) = x^2y + 2x$
- $(x - 2) \cdot (x - y) = x \cdot (x - y) - 2 \cdot (x - y) = x^2 - xy - 2x + 2y$
- $(3a^2 - 5y) \cdot (2x^2 + b) = (3a^2 - 5y) \cdot 2x^2 + (3a^2 - 5y) \cdot b =$
  $$= 3a^2 \cdot 2x^2 - 5y \cdot 2x^2 + 3a^2 \cdot b - 5y \cdot b = 6a^2x^2 - 10x^2y + 3a^2b - 5by$$

NOTA Somma e prodotto di polinomi vengono quindi svolti pensando ai polinomi come espressioni. Ciò significa che, se diciamo che due polinomi sono uguali, devono essere uguali i valori che si ottengono dai due polinomi quando alle lettere si sostituiscono numeri e, per essere sicuri che questo succeda, dobbiamo interpretare i monomi come prodotti di potenze, i polinomi come loro somma e operare sui polinomi usando le proprietà che valgono per la somma e il prodotto di numeri:
- le proprietà commutativa e associativa della somma,
- le proprietà commutativa e associativa del prodotto,
- la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

Prodotti notevoli

Ricordiamo:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Un'applicazione dei prodotti notevoli è la cosiddetta "razionalizzazione del denominatore", di cui riportiamo qui un esempio

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)} = \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{9-5} = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}.$$

Ovviamente, se serve, si può applicare la procedura a rovescio. Vedremo subito un'altra applicazione.

Scomposizione in fattori

Si scompone un polinomio in fattori quando lo si esprime come prodotto di polinomi di grado più basso.
Non tutti i polinomi sono scomponibili in fattori: ad esempio a^2+1 non si può scrivere come prodotto di due polinomi di primo grado a coefficienti reali.
Inoltre anche quando un polinomio è esprimibile come prodotto di due (o più) altri polinomi di grado inferiore, non sempre è facile individuare tali polinomi fattori, poiché *non esistono regole generali* che permettano di effettuare sempre la scomposizione: ad esempio, come scomporre il polinomio $x^4 - x - 1$?

Comunque, da quanto abbiamo appena visto si deducono due possibili metodi di scomposizione:

- il **raccoglimento a fattor comune**: ad esempio

$$x^2y + 2x = x(xy + 2):$$

(notiamo che abbiamo solo letto a ritroso l'uguaglianza scritta nel secondo degli esempi 3.5); oppure:

$$x^2 - xy - 2x + 2y = x \cdot (x - y) - 2 \cdot (x - y) = (x - 2) \cdot (x - y);$$

- la **scomposizione mediante prodotti notevoli**: ad esempio

$$4x^2 - 1 = (2x - 1)\,(2x + 1),$$

oppure

$$x^2 - x + \tfrac{1}{4} = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2.$$

La scomposizione in fattori ha diversi usi: ne vedremo un'applicazione importante nelle lezioni sulle equazioni e sulle disequazioni. Inoltre la scomposizione è un metodo per:

- fare qualche conto più rapidamente: ad esempio

$$463^2 - 4 \cdot 231^2 = 463 + 462 = 925,$$

poiché la prima espressione è una differenza di quadrati, che si riscrive

$$(463 + 2 \cdot 231)(463 - 2 \cdot 231) = (463 + 462)(463 - 462)$$

- semplificare alcune espressioni (che possono non essere polinomi e anche non dare luogo, una volta semplificate, a polinomi): ad esempio,

$$\text{se} \qquad x + y \neq 0, \qquad \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{(x - y) \cdot (x + y)}{x + y} = x - y;$$

oppure

$$\text{se} \qquad x \geq 0, \qquad \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - 1.$$

3. Polinomi in una variabile

Nel seguito ci limiteremo a considerare polinomi in una variabile, come ad esempio:

$$x^2 + \sqrt{3}, \qquad 3x^4 - \frac{2}{3}x + \pi, \qquad -2x^3 + 5x^2 - 3x - 4.$$

Per parlare di questi polinomi in maniera generale è opportuno poter indicare i coefficienti con lettere (solitamente a, b, ...) alle quali si pensa di dare dei valori arbitrari ma fissati (costanti), mentre si pensa la x come variabile, suscettibile di assumere qualunque valore.

Ad esempio, il generico polinomio di grado 3 potrà essere indicato con la scrittura:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

ove $a \neq 0$.

Talora denoteremo un polinomio nella variabile x con $P(x)$ e utilizzeremo il simbolo $P(k)$ per indicare il valore che si ottiene eseguendo su un numero reale k le operazioni indicate nel polinomio. Ad esempio, se $P(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x - 4$, allora $P(2) = -2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 4 = -6$.

Terminologia

- Se il polinomio è scritto come somma di monomi aventi tutti grado diverso rispetto a x, il monomio di grado 0 si dice **termine noto**.
- Il **polinomio nullo** (che sommato a ogni altro polinomio lo lascia invariato) si indica con 0.
- Due polinomi si dicono **uguali** se hanno uguali i coefficienti dei termini di ugual grado.

Esempio 3.6 Il polinomio $P(x) = (a+b)x^3 + bx^2 + 3x + b - c$ (considerato come polinomio nella variabile x):

- ha grado 3 se $a + b \neq 0$;
- ha termine noto $b - c$;
- è uguale a $2x^2 + 3x + 1$ se e solo se

  $$a + b = 0 \qquad \text{e} \qquad b = 2 \qquad \text{e} \qquad b - c = 1,$$

  cioè se e solo se: $a = -2$ e $b = 2$ e $c = 1$;
- non è uguale a $2x^2 + 4x + 1$ per nessun valore di a, b, c poiché il coefficiente di x in $P(x)$ è 3 e non 4.

Divisione di polinomi

Si dice che un polinomio $P(x)$ è **divisibile** per un polinomio $D(x) \neq 0$ se esiste un polinomio $Q(x)$ tale che

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x).$$

$P(x)$ si chiama **dividendo**, $D(x)$ si chiama **divisore**, $Q(x)$ si chiama **quoziente** nella divisione di $P(x)$ per $D(x)$.

Ad esempio, prendendo come dividendo $x^2 - 4$ e come divisore $x + 2$ si ha come quoziente $x - 2$, poiché

$$x^2 - 4 = (x + 2)\,(x - 2).$$

Dati due polinomi (diversi dal polinomio nullo) non è sempre vero che quello di grado maggiore è divisibile per l'altro; ad esempio $P(x) = x^2$ non è divisibile per $D(x) = x + 1$; risulta però

$$x^2 = (x + 1)\,(x - 1) + 1.$$

In generale vale il

Teorema 3.7 *Dati due polinomi $P(x)$ e $D(x)$, con $D(x) \neq 0$, esistono (e sono unici) due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:*

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x) \text{ con il grado di } R(x) \text{ minore del grado di } D(x).$$

$R(x)$ prende il nome di **resto nella divisione di** $P(x)$ **per** $D(x)$.

La formula del teorema 3.7 si può riscrivere dicendo che esistono $Q(x)$ e $R(x)$ tali che

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \qquad \text{con il grado di } R(x) \text{ minore del grado di } D(x).$$

Quindi ad esempio

$$\frac{x^2}{x+1} = (x - 1) + \frac{1}{x+1}.$$

Esempio 3.8 Per *verificare* che il quoziente e il resto della divisione di $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ per $D(x) = x^2 + x$ sono rispettivamente $Q(x) = 3x^2 - 3x + 1$ e $R(x) = -x - 1$, basta osservare che il grado di $R(x)$ è 1 e quindi è minore del grado 2 di $D(x)$ e, sostituendo, verificare la validità della formula del teorema 3.7:

$$\left(x^2 + x\right)\left(3x^2 - 3x + 1\right) + (-x - 1) = (3x^4 - 2x^2 + x) + (-x - 1) = 3x^4 - 2x^2 - 1.$$

Per *determinare* il quoziente e il resto esiste un algoritmo che richiamiamo sul precedente esempio.

Considero il monomio di grado massimo del dividendo e lo divido per quello di grado massimo del divisore, trovando così il 1° quoziente parziale:

cerco il 1° monomio quoziente parziale

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & & -2x^2 & & -1 & x^2+x \\ \cline{6-6} & & & & & 3x^2 \end{array}$$

lo moltiplico per l'opposto del divisore e trascrivo il prodotto sotto il dividendo

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & & -2x^2 & & -1 & x^2+x \\ \cline{6-6} -3x^4 & -3x^3 & & & & 3x^2 \end{array}$$

sommo e trovo il 1° resto parziale

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & & -2x^2 & & -1 & x^2+x \\ \cline{6-6} -3x^4 & -3x^3 & & & & 3x^2 \\ \cline{1-5} & -3x^3 & -2x^2 & & -1 & \end{array}$$

cerco il 2° monomio quoziente parziale

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & & -2x^2 & & -1 & x^2+x \\ \cline{6-6} -3x^4 & -3x^3 & & & & 3x^2-3x \\ \cline{1-5} & -3x^3 & -2x^2 & & -1 & \end{array}$$

lo moltiplico per l'opposto del divisore e trascrivo il prodotto sotto il 1° resto parziale

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & & -2x^2 & & -1 & x^2+x \\ \cline{6-6} -3x^4 & -3x^3 & & & & 3x^2-3x \\ \cline{1-5} & -3x^3 & -2x^2 & & -1 & \\ & 3x^3 & 3x^2 & & & \end{array}$$

sommo e trovo il 2° resto parziale e cerco il 3° monomio quoziente parziale

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & & -2x^2 & & -1 & x^2+x \\ \cline{6-6} -3x^4 & -3x^3 & & & & 3x^2-3x+1 \\ \cline{1-5} & -3x^3 & -2x^2 & & -1 & \\ & 3x^3 & 3x^2 & & & \\ \cline{2-5} & & x^2 & & -1 & \end{array}$$

lo moltiplico per l'opposto del divisore e sommo, trovando il 3° resto parziale: leggendo il suo grado verifico che non posso fare altre divisioni

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & & -2x^2 & & -1 & x^2+x \\ \cline{6-6} -3x^4 & -3x^3 & & & & 3x^2-3x+1 \\ \cline{1-5} & -3x^3 & -2x^2 & & -1 & \\ & 3x^3 & 3x^2 & & & \\ \cline{2-5} & & x^2 & & -1 & \\ & & -x^2 & -x & & \\ \cline{3-5} & & & -x & -1 & \end{array}$$

e quindi il quoziente è $3x^2 - 3x + 1$ e il resto è $-x - 1$.

Regola di Ruffini

Un caso particolarmente importante di divisione tra polinomi si ha quando il divisore è di primo grado, di forma: $D(x) = x - a$ (dove pensiamo che a rappresenti una costante qualsiasi, mentre x è la variabile). In questo caso particolare, il resto deve avere grado <1, cioè deve essere un numero reale e quindi il teorema sulla divisione si rienuncia così:

Dato un polinomio $P(x)$ di grado n e un numero reale a esistono (e sono unici) il polinomio $Q(x)$ di grado $n-1$ e il numero reale r tali che:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - a) + r.$$

Se nella formula precedente sostituiamo il numero a al posto della variabile x, otteniamo:

$$P(a) = Q(a) \cdot (a - a) + r = r,$$

ossia il resto della divisione di $P(x)$ per $x - a$ è dato da $P(a)$.
Per definizione, il polinomio $P(x)$ è divisibile per $x - a$ se e solo se il resto r è zero e quindi

Teorema di Ruffini	$P(x)$ è divisibile per $x - a$ se e solo se $P(a) = 0$

In questo caso diciamo che a è una **radice** del polinomio $P(x)$.
Per trovare il resto, e i coefficienti di $Q(x)$, si usa la cosiddetta **regola di Ruffini**, che illustriamo nel prossimo esempio.

Esempio 3.9 Vogliamo trovare il quoziente e il resto della divisione di $P(x) = 3x^4 - 4x^2 + x - 5$ per $x - 2$. Notiamo subito che il resto sarà $P(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^2 + 2 - 5 = 29$. Per trovare i coefficienti del quoziente consideriamo lo schema

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 3 & 0 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & & & & & \\ \hline & 3 & & & & \end{array}$$

in cui abbiamo riportato:

- sulla prima riga (a partire dalla seconda colonna) i coefficienti di *tutti* i monomi di $P(x)$, ordinati secondo le potenze decrescenti di x, da quello di grado 4 a quello di grado 0,
- sulla seconda a,
- sulla terza riga (e seconda colonna) il coefficiente che trovo nella stessa posizione sulla prima riga.

Moltiplichiamo tale coefficiente per $a = 2$, lo riportiamo sulla seconda riga (e terza colonna) e sommiamo gli elementi che stanno su tale colonna

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 3 & 0 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & & 6 & & & \\ \hline & 3 & 6 & & & \end{array}$$

rifacciamo sul coefficiente 6 così trovato quel che abbiamo fatto prima su 3

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 3 & 0 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & & 6 & 12 & & \\ \hline & 3 & 6 & 8 & & \end{array}$$

Proseguendo così, troviamo alla fine:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 3 & 0 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & & 6 & 12 & 16 & 34 \\ \hline & 3 & 6 & 8 & 17 & 29 \end{array}$$

Ora leggiamo i coefficienti del quoziente sull'ultima riga (esclusa l'ultima colonna che ci dà, invece, il resto), ricordando che il primo è il coefficiente del monomio di grado $4 - 1 = 3$ e gli altri sono ordinati secondo le potenze decrescenti di x. Quindi

$$Q(x) = 3x^3 + 6x^2 + 8x + 17$$

e

$$r = 29.$$

NOTA L'algoritmo appena descritto corrisponde a riscrivere il polinomio $P(x)$ come segue:

$$3x^4 + 0x^3 - 4x^2 + x - 5 = [3x^3 + 0x^2 - 4x + 1]x - 5 = ... = [\{[(3)x + 0]x - 4\}x + 1]x - 5$$

e calcolare per $x = -a = 2$ i valori delle espressioni contenute nelle coppie di parentesi, a cominciare dalla più interna:

$$(3), \qquad [(3) \cdot 2 + 0], \qquad \{[(3) \cdot 2 + 0] \cdot 2 - 4\}, \qquad [\{[(3) \cdot 2 + 0] \cdot 2 - 4\} \cdot 2 + 1]:$$

questi sono i coefficienti del polinomio quoziente, (ordinati secondo le potenze decrescenti di x) mentre il resto è

$$[\{[(3) \cdot 2 + 0] \cdot 2 - 4\} \cdot 2 + 1] \cdot 2 - 5.$$

Osserviamo che calcolare il valore di un polinomio usando la strategia appena presentata abbassa da $2n - 1$ a n il numero di moltiplicazioni da eseguire, cosa di grande importanza quando i calcoli venivano eseguiti a mano, e anche adesso, quando il polinomio debba essere valutato per molti valori diversi della x o quando si voglia usare una calcolatrice scientifica dotata di poche "memorie".