Lezione 4
Equazioni.

1. Identità ed equazioni

Supponiamo di avere due espressioni, almeno una delle quali contenga delle variabili: indichiamo tali espressioni con A e B. La scrittura

$$A = B$$

prende il nome di **equazione** e le variabili [1] che in essa compaiono si dicono **incognite**.
Trovare una soluzione di un'equazione significa trovare tanti numeri quante sono le incognite i quali, sostituiti ordinatamente al posto delle incognite, rendano vera l'uguaglianza.
Risolvere un'equazione significa trovare tutte le possibili soluzioni.

Esempio 4.1 Consideriamo l'equazione nelle due incognite, x e y: $xy = 0$. Una sua soluzione è ad esempio data dalla coppia $x = 0$, $y = 7$; ma non è ovviamente la sola: se $x = 0$, comunque si scelga il valore da attribuire a y, l'uguaglianza è verificata. D'altra parte, se $y = 0$, comunque si scelga il valore da attribuire a x, l'uguaglianza è verificata. Quindi si può descrivere l'insieme delle soluzioni di $xy = 0$ nel seguente modo

$$\{x = 0 \text{ e } y \text{ qualsiasi}\} \cup \{y = 0 \text{ e } x \text{ qualsiasi}\}.$$

L'uguaglianza che compare in un'equazione può essere verificata

I) per *ogni* insieme di valori attribuiti alle incognite che compaiono in A e B per i quali tanto A che B abbiano senso,

OPPURE

II) per *qualche* insieme di valori attribuiti alle incognite che compaiono in A e B per i quali tanto A che B abbiano senso, *ma non per tutti*,

OPPURE

III) per *nessun* insieme di valori attribuiti alle incognite che compaiono in A e B per i quali tanto A che B abbiano senso.

Nel CASO I si dice che l'**uguaglianza** è **identicamente verificata** (o identicamente soddisfatta). Ciò succede sicuramente nel caso di **identità**, come

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

oppure

$$w(x - y) = wx - wy,$$

cioè di uguaglianze in cui il membro a destra è solo una maniera diversa di scrivere quello a sinistra.

---

1) In realtà ci sono casi in cui non si vuole (o non conviene) pensare a <u>tutte</u> le variabili che compaiono in A e B come "incognite". Ad esempio, nell'equazione $2x - y = 0$ si può decidere che sono incognite tanto x che y, oppure che solo la y è un'incognita, mentre la x è un parametro (o viceversa). Nel primo caso l'equazione ha soluzioni $\{x = k, \ \ y = 2k\}$, ove k è un qualunque numero reale; nel secondo caso l'equazione ha soluzione $y = 2x$, ove x è un qualunque numero reale.

Ancora

Esempio 4.2 $\sqrt{x^2} = |x|$ è un'identità, valida per ogni numero reale x.

Ci sono però altre situazioni in cui un'uguaglianza risulta identicamente verificata.

Esempio 4.3 L'uguaglianza $\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x(x+1)}$ è identicamente verificata. Infatti, per ogni x, con $x \neq 0$ e $x \neq -1$, il membro di sinistra coincide con quello di destra: ma non è un'identità, poiché il membro di destra non è definito per $x = 0$ né per $x = -1$, mentre quello di sinistra per $x = -1$ è definito.

Esempio 4.4 L'uguaglianza $\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ è identicamente verificata. Infatti, per ogni $x > 0$, il membro di sinistra coincide con quello di destra: ma non è un'identità, poiché il membro di sinistra è definito solo per $x > 0$, mentre quello di destra è definito per $x \geq 0$.

Nel CASO II siamo di fronte a un'*equazione che ammette soluzioni*, che possono essere *in numero finito oppure no.* Se l'equazione ha infinite soluzioni diciamo che è **indeterminata**.

Esempi 4.5

- $|x| = 3$ ammette due soluzioni: $x = 3$ e $x = -3$.
- L'equazione nelle variabili x e y: $2x + 3y = 0$ è indeterminata, poiché ha come insieme di soluzioni $\{x = 3h,\ y = -2h\}$, ove scrivendo h indichiamo che, qualunque valore attribuiamo ad h, otteniamo una soluzione dell'equazione.

Nel CASO III, cioè quando non ci sono soluzioni, diciamo che l'equazione è **impossibile**.
Qualche volta l'impossibilità di risolvere l'equazione è intrinseca.

Esempio 4.6 $x = x + 1$ è impossibile in qualsiasi insieme di numeri.

Altre volte l'impossibilità di risolvere l'equazione dipende dall'insieme numerico in cui vogliamo trovare le soluzioni.

Esempio 4.7 $x^2 - 2 = 0$ non ha soluzioni razionali, ma ha due soluzioni reali.

Esempio 4.8 $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali, ma c'è un insieme di numeri (i *complessi*) in cui ha due soluzioni.

NOTA. L'insieme dei numeri interi relativi e quello dei numeri razionali nascono proprio dall'esigenza di risolvere equazioni come

$$x + 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad 2x - 1 = 0$$

che con i soli numeri naturali non si possono risolvere!

Nel seguito saremo interessati alla <u>ricerca delle soluzioni reali</u> delle equazioni.

2. Principi basilari per risolvere le equazioni

Per risolvere le equazioni è utile ricordare alcuni principi che permettono di passare da un'equazione ad un'altra *equivalente*, cioè che possiede tutte e sole le soluzioni della precedente.
Per semplicità enunciamo tali principi per equazioni in una sola incognita, anche se la loro validità non dipende dal numero delle incognite.

Data l'equazione

$$A(x) = B(x),$$

1) aggiungendo ai due membri dell'equazione $A(x) = B(x)$ una stessa espressione $C(x)$, *che sia definita almeno dove sono definite* $A(x)$ e $B(x)$, si ottiene l'equazione equivalente

   $$A(x) + C(x) = B(x) + C(x).$$

   Possiamo scrivere

   $$\boxed{A(x) = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) + C(x) = B(x) + C(x),}$$

   ove $\Leftrightarrow$ si legge: "*è equivalente a*" [2];

2) se k è un numero o una espressione *non* contenente l'incognita e *diversa da zero*, allora, moltiplicando (o dividendo) per k ambedue i membri dell'equazione $A(x) = B(x)$ si ottiene l'equazione equivalente

   $$kA(x) = kB(x),$$

   cioè

   $$\boxed{A(x) = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad kA(x) = kB(x), \text{ per ogni } k \neq 0.}$$

Il 1° principio consente di scrivere ogni equazione nella forma

$$A(x) = 0.$$

Ad esempio, ci permette di passare dall'equazione $2x = 1 - \dfrac{x}{2}$ all'equazione equivalente $\dfrac{5}{2}x - 1 = 0$, sottraendo a entrambi i membri l'espressione $1 - \dfrac{x}{2}$.

Arrivati alla forma $A(x) = 0$, molto spesso per risolvere l'equazione ci si comporta come nell'esempio 4.1, cioè si cerca di usare il **principio di annullamento del prodotto**:

se $A(x)$ si può esprimere come prodotto di due (o più) fattori, allora $A(x) = 0$ se e solo se si annulla *almeno* uno dei fattori.

Ciò significa che l'insieme delle soluzioni dell'equazione $B(x) \cdot C(x) = 0$ è l'unione delle soluzioni di $B(x) = 0$ e di $C(x) = 0$.

---

[2] ATTENZIONE a "che cosa" si aggiunge applicando il primo principio! Se sommiamo $C(x) = 1/x$ ai due membri dell'equazione $x(x+1) = 2x^3 - x$, l'equazione che otteniamo non è equivalente a quella data, poiché $x = 0$ è soluzione dell'equazione originaria ma l'espressione $C(x)$ non è definita per $x = 0$.

3. Equazioni di primo grado

Ci occupiamo nei prossimi due paragrafi di equazioni in una incognita

$$A(x) = 0$$

in cui l'espressione $A(x)$ è un *polinomio*. Se $A(x)$ ha grado n si dice che l'**equazione** è **di grado** n.

In particolare consideriamo le **equazioni di primo grado**, cioè le equazioni che, dopo aver applicato i principi sopra enunciati, possono essere scritte nella forma

$$ax + b = 0.$$

Chiaramente, se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'equazione è impossibile.
Se $a = 0$ e anche $b = 0$, allora l'uguaglianza vale per qualunque valore di x.
Se $a \neq 0$, l'equazione ha una e una sola soluzione data da

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Esempio 4.9 $3x^5 - 7x + 4 = x\left(5 + 3x^4\right) + 10$ è un'equazione di primo grado (poiché è equivalente a $12x + 6 = 0$) e ha soluzione $x = -\dfrac{1}{2}$.

4. Equazioni di secondo grado

Studiamo adesso le equazioni di **secondo grado**, cioè quelle che, dopo aver applicato i principi sopra enunciati, possono essere scritte nella forma

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Possiamo pensare $a \neq 0$, altrimenti l'equazione è di primo grado e sappiamo già come risolverla.
Le equazioni di secondo grado si studiano molto facilmente quando $b = 0$ o $c = 0$.
Infatti, se $c = 0$ l'equazione si riscrive come

$$(ax + b)x = 0$$

e quindi (per il principio di annullamento del prodotto) ha soluzioni $x = 0$ e $x = -\dfrac{b}{a}$.
Se $b = 0$ l'equazione diventa

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

che scriveremo più semplicemente

$$x^2 = d.$$

Essa ha soluzioni reali se e solo se $d \geq 0$:

- se $d \geq 0$, risulta $x^2 - d = \left(x - \sqrt{d}\right)\left(x + \sqrt{d}\right)$ e quindi l'equazione ha soluzioni $x = \sqrt{d}$ e $x = -\sqrt{d}$. Osserviamo che se $d = 0$ le due soluzioni coincidono (talora ci si riferisce a questo caso dicendo che $x = 0$ è radice doppia).
- se $d < 0$ l'equazione è impossibile.

Nel caso generale cerchiamo di ricondurci ad un'equazione del tipo appena studiato con un procedimento detto di *completamento di un quadrato*, come illustrato nel seguente

Esempio 4.10 Data l'equazione $4x^2 + 12x + 1 = 0$, osserviamo che

$$[4x^2 + 12x] + 1 = [(2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 3 + 3^2 - 3^2] + 1 = (2x + 3)^2 - 8$$

e quindi

$$4x^2 + 12x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x + 3)^2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3 = \pm 2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}.$$

Lo stesso modo di procedere permette di decidere se un'equazione di secondo grado è impossibile.

Esempio 4.11 $4x^2 + 12x + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x+3)^2 - 3^2 + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x+3)^2 = -1$: dunque l'equazione data non ha soluzioni reali.

In generale, se $a \neq 0$:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Quindi

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

1° caso: Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ci sono due soluzioni reali e distinte: $\quad \alpha, \beta = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2° caso: Se $\Delta = 0$ ci sono due soluzioni coincidenti: $\alpha = \beta = -\dfrac{b}{2a}$

3° caso: Se $\Delta < 0$ non esistono soluzioni reali.

Sappiamo (teorema di Ruffini, Lezione 3) che se un polinomio $P(x)$ ha una radice α allora $P(x)$ è divisibile per $x - \alpha$. Quindi

Proposizione 4.12 *Se il polinomio $ax^2 + bx + c$ ha due radici reali α e β, allora ammette la scomposizione in fattori:*

$$a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Inoltre si ha

$$(\alpha + \beta) = -\frac{b}{a} \qquad e \qquad \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}.$$

Esempi 4.13

- $-2x^2 + x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - x - 1 = 0$ ha $\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$. Quindi l'equazione ha due soluzioni distinte: $\dfrac{1 \pm 3}{4}$ cioè 1 e $-\dfrac{1}{2}$, per cui $-2x^2 + x + 1 = -2\,(x - 1)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$.

- $x^2 - 5x + 6 = 0$: possiamo procedere come nel caso precedente oppure osservare che, se α e β sono le soluzioni dobbiamo avere $(\alpha + \beta) = 5$ e $\alpha \cdot \beta = 6$. Allora $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

- $x^2 + x + 1 = 0$ ha $\Delta = 1 - 4 < 0$: l'equazione non ha soluzioni reali.

- $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ ha $\Delta = 8 - 4 \cdot 2 = 0$: l'equazione ha due soluzioni coincidenti, $\alpha = \beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Equazioni fratte

Prendiamo adesso in esame le equazioni che, dopo aver applicato i principi enunciati nel paragrafo 2, possono essere scritte nella forma

$$(\star) \qquad \frac{N(x)}{D(x)} = 0,$$

ove $N(x)$ e $D(x)$ sono due polinomi.

Val la pena di ricordare che ogni espressione della forma $\frac{N(x)}{D(x)}$, ove $N(x)$ e $D(x)$ sono due polinomi, è detta razionale e che è detta **espressione razionale fratta,** se $D(x)$ contiene la variabile x: in questo caso l'equazione $(\star)$ è detta **equazione fratta.**

Le espressioni razionali fratte possono non avere significato per particolari valori di x (quelli che rendono nullo il denominatore!). Quindi, prima di risolvere un'equazione fratta dobbiamo richiedere la

CONDIZIONE DI ESISTENZA

L'espressione $\frac{N(x)}{D(x)}$ ha senso solo per i valori di x per i quali $D(x) \neq 0$

Se ha senso, l'espressione $\frac{N(x)}{D(x)}$ è $= 0$ se e solo se il suo numeratore è $= 0$. Cioè

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad D(x) \neq 0 \quad \text{e} \quad N(x) = 0.$$

Esempi 4.14 Determiniamo le eventuali soluzioni delle seguenti equazioni:

- $\frac{37 - 25x}{4x - 5} = 0$

  L'espressione $\frac{37 - 25x}{4x - 5}$ ha senso solo per $4x - 5 \neq 0$, cioè $x \neq 5/4$. Il numeratore si annulla per $x = 37/25$ che è $\neq 5/4$: dunque $x = 37/25$ è la soluzione dell'equazione.

- $\frac{x^2 + 7}{4(1 - x)} = 0$

  L'espressione $\frac{x^2 + 7}{4(1 - x)}$ ha senso solo per $4(1 - x) \neq 0$, cioè $x \neq 1$. Il numeratore non si annulla per alcun valore di x: dunque l'equazione non ha soluzioni.

- $\frac{x^5\,(x^4 - 1)}{x^2 - 3x + 2} = 0$

  L'espressione $\frac{x^5\,(x^4 - 1)}{x^2 - 3x + 2}$ ha senso solo per $x^2 - 3x + 2 \neq 0$, cioè $x \neq 1$ e $x \neq 2$. Il numeratore si annulla per $x = 0$, per $x = -1$ e per $x = 1$: *solo* 0 *e* -1 *non annullano il denominatore* e quindi sono le uniche soluzioni dell'equazione.

Lo studio di un'equazione fratta può essere molto difficile se non impossibile. Un caso semplice è quello in cui numeratore e denominatore sono di primo grado.
Prima di applicare il metodo di svolgimento che abbiamo illustrato o di decidere se l'equazione fratta ha numeratore e denominatore di primo grado, bisogna sempre ricondurre l'equazione alla forma

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 0.$$

Esempi 4.15

- $\dfrac{3x-2}{x+5} = 1$

  ATTENZIONE: qui dopo il simbolo $=$ *c'è* 1 *e non* 0 *come nelle equazioni esaminate finora.* Riscriviamo l'equazione nella forma $\dfrac{3x-2}{x+5} - 1 = 0$, cioè $\dfrac{2x-7}{x+5} = 0$. L'espressione $\dfrac{2x-7}{x+5}$ ha senso solo per $x+5 \neq 0$, cioè $x \neq -5$. Il numeratore si annulla per $x = 7/2$ che è $\neq -5$: dunque $x = 7/2$ è la soluzione dell'equazione.

- $\dfrac{2x}{3+x} = 4.$ Riscriviamo l'equazione nella forma $(\star)$

  $\dfrac{2x}{3+x} - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{-12-2x}{3+x} = 0$. L'espressione $\dfrac{-12-2x}{3+x}$ ha senso solo per $x \neq -3$. Il numeratore si annulla per $x = -6$ che è $\neq -3$: dunque $x = -6$ è la soluzione dell'equazione.

- $\dfrac{3x-2}{x+5} = \dfrac{2x+3}{5-x}.$ Riscriviamo l'equazione nella forma $(\star)$

  $$\frac{3x-2}{x+5} - \frac{2x+3}{5-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(3x-2)\,(x-5) + (2x+3)\,(x+5)}{(x+5)\,(x-5)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5x^2-4x+25}{(x+5)\,(x-5)} = 0.$$

  Dunque numeratore e denominatore sono di secondo grado. L'espressione $\dfrac{5x^2-4x+25}{(x+5)\,(x-5)}$ ha senso solo per $x \neq \pm 5$. Il numeratore, però, non si annulla per alcun valore di x poiché $\Delta = 16 - 20 \cdot 25 < 0$: dunque l'equazione non ha soluzioni.

- $\dfrac{x^2+3}{4x\,(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}.$ Riscriviamo l'equazione nella forma $(\star)$

  $\dfrac{x^2+3}{4x\,(x-1)} - \dfrac{1}{x-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2-4x+3}{4x\,(x-1)} = 0$. Questa è apparentemente un'equazione fratta con numeratore e denominatore di secondo grado, ma il numeratore si scompone come $(x-1)\,(x-3)$. Quindi l'equazione è equivalente [(3)] all'equazione fratta, con numeratore e denominatore di primo grado $\dfrac{x-3}{4x} = 0$: dunque $x = 3$ è la soluzione dell'equazione.

  Attenzione: *l'equazione data e quella che si ottiene annullando il numeratore dell'equazione fratta con numeratore e denominatore di secondo grado non hanno le stesse soluzioni!*

[3)] Le due espressioni fratte $\dfrac{x^2-4x+3}{4x\,(x-1)}$ e $\dfrac{x-3}{4x}$ non sono uguali (poiché la prima non è definita per $x=0$ e $x=1$, mentre la seconda non lo è solo se $x=0$), ma le due equazioni ottenute uguagliandole a 0 hanno la stessa soluzione. Infatti il numeratore della prima espressione si annulla per $x=1$ e per $x=3$, ma solo $x=3$ è soluzione dell'equazione fratta, poiché per $x=1$ l'espressione non ha senso.

6. Altri tipi di equazioni

Sia $P(x)$ un polinomio di grado n; vogliamo risolvere un'equazione della forma: $P(x) = 0$.
Una conseguenza di un teorema non elementare, noto come *teorema fondamentale dell'algebra*, afferma che tutti i polinomi in una variabile a coefficienti reali si possono scomporre nel prodotto di polinomi di grado ≤ 2 (anche se trovare la scomposizione può essere tutt'altro che elementare). Quindi, almeno in linea teorica ci possiamo sempre ricondurre a risolvere equazioni di primo e di secondo grado, applicando il principio di annullamento del prodotto: per questo motivo si dà di solito maggior rilievo allo studio di tali equazioni.

Diamo qualche esempio di come operare nei casi più semplici.

Esempi 4.16

- $2x^{17} + x^{16} = 0$: poiché $2x^{17} + x^{16} = x^{16}(2x+1)$, l'insieme delle soluzioni dell'equazione è l'unione degli insiemi di soluzioni di $x^{16} = 0$ e di $2x + 1 = 0$. Quindi l'equazione data ha solo due soluzioni *distinte*: $x = 0$ e $x = -\frac{1}{2}$.

- $x^3 - 1 = 0$: poiché $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, l'insieme delle soluzioni dell'equazione è l'unione degli insiemi di soluzioni di $x - 1 = 0$ e di $x^2 + x + 1 = 0$. La seconda equazione non ha soluzioni poiché $\Delta = 1 - 4 < 0$. Quindi l'equazione data ha una sola soluzione: $x = 1$.

- $x^4 - 1 = 0$: poiché $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$, l'insieme delle soluzioni dell'equazione è l'unione degli insiemi di soluzioni di $x - 1 = 0$, di $x + 1 = 0$ e di $x^2 + 1 = 0$. La terza equazione non ha soluzioni. Quindi l'equazione data ha solo due soluzioni: $x = 1$ e $x = -1$.

- $x^4 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali (poiché la somma di 1 e di una quantità non negativa non può essere nulla).

- $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$: se nel polinomio $x^4 - 3x^2 + 2$ sostituiamo $x^2 = t$ troviamo $t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$. Quindi $x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2-1)(x^2-2) = (x-1)(x+1)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$. Dunque l'equazione data ha 4 soluzioni: $x = \pm 1$ e $x = \pm\sqrt{2}$.

- $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$: per il teorema di Ruffini, 1 è una radice del polinomio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ e risulta $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$. Ancora usando il teorema di Ruffini (oppure risolvendo l'equazione di 2° grado $x^2 - 5x + 6 = 0$) troviamo che $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ e quindi l'equazione data ha tre soluzioni: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

Dagli esempi si intuisce [4] che:

- se il grado di $P(x)$ è n, l'equazione $P(x) = 0$ non ha mai più di n soluzioni (e talvolta non tutte diverse);

- se n è dispari c'è sempre almeno una soluzione reale;

- se n è pari può non esistere alcuna soluzione reale.

Dunque si ha una situazione del tutto analoga a quella già incontrata rispettivamente con le equazioni di 1° e di 2° grado.

Vogliamo infine illustrare come risolvere alcune semplici equazioni che non ricadono nelle forme precedentemente viste, senza con ciò pretendere di esaurire i casi possibili.

4) Anche solo un cenno di motivazione di questi enunciati va al di là delle intenzioni di queste lezioni: ma conviene ricordarli come DATI, utili per controllare la plausibilità dei risultati che si ottengono.

Esempio 4.17

- $|x-3| = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x-3 = \pm 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$ oppure $x = -4$. Il modo di procedere è giustificato dal fatto che i soli due numeri che hanno modulo 7 sono: 7 e -7.

- $|x| - 2x = 6$ non ha soluzioni positive, poiché, se $x \geq 0$, $|x| = x$ e $|x| - 2x = -x < 0$ non può valere 6. Invece ha una (e una sola) soluzione negativa, poiché, se $x < 0$, $|x| = -x$ e quindi l'equazione data si riscrive $-3x = 6$ e ha soluzione $x = -2$.

Esempi 4.18

- $\sqrt{x} + 4 = 0$ non ha soluzioni reali, poiché la radice quadrata non è mai negativa.

- $\sqrt[3]{x} + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt[3]{x} = -4 \;\Leftrightarrow\; x = -64$, poiché la radice cubica ha senso anche per numeri negativi e $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = (-4)^3 = -64$

- $\sqrt{x-1} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$. In questo caso tanto l'espressione a destra che quella a sinistra del simbolo $=$ sono non negative, se sono definite: questo permette di dire che anche i loro quadrati sono uguali.

- $\sqrt{1-x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = -8$.

  Attenzione, però: *questo modo di procedere con le radici quadrate vale solo per equazioni della forma* $\sqrt{ax+b} = k$, *con* a, b, k *numeri reali e* $k \geq 0$ (5).

- $\sqrt{3x+4} = x$: se procedessimo come sopra troveremmo $x^2 - 3x - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 4$ o $x = -1$, cioè tra le soluzioni dell'equazione di 2° grado ne troveremmo una che non è soluzione di quella di partenza, poiché $\sqrt{-3+4} = 1 \neq -1$.

Si possono applicare i metodi risolutivi visti per le equazioni di secondo grado o per le equazioni fratte anche per alcune equazioni contenenti potenze o logaritmi.

Esempi 4.19

- $x^{3/4} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = 7^{4/3} = 7\sqrt[3]{7}$.

- $\dfrac{x^{3/2} - 7x^{3/4}}{x - 7^{4/3}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^{3/4}\left(x^{3/4} - 7\right)}{x - 7^{4/3}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$, poiché l'altro valore che annulla il numeratore è $x = 7^{4/3}$, ma per questo valore di x l'espressione fratta non è definita.

- $2^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 2^x = \log_2 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_2 3$.

- $2^{2x} - 2^{x+1} - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 2 \cdot (2^x) - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 3$, poiché l'altro valore che annulla l'equazione di secondo grado in 2^x è negativo e quindi non può essere una potenza di 2. Quindi anche quest'equazione ha soluzione $x = \log_2 3$.

- $\log_{10} x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad 10^{\log_{10} x} = 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^{-3}$.

- $(\log_{10} x)^2 + 2(\log_{10} x) - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{10} x = 1$ oppure $\log_{10} x = -3 \quad \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \quad x = 10$ oppure $x = 10^{-3}$.

---

5) È opportuno osservare che, se $k < 0$, l'equazione $\sqrt{ax+b} = k$ è impossibile.

7. Sistemi di equazioni

Un sistema di equazioni consiste in un certo numero n ($n \geq 2$) di equazioni che vogliamo siano verificate contemporaneamente. Il simbolo grafico utilizzato per denotare questa collezione di equazioni è quello della parentesi graffa che "abbraccia" n righe, in ognuna delle quali sta scritta una equazione

$$\begin{cases} \textit{prima eq.} \\ \textit{seconda eq.} \\ \ldots\ldots \\ n - \textit{sima eq.} \end{cases}$$

Le equazioni del sistema possono coinvolgere una o più incognite. In ciascuna riga non vi sono, a priori, restrizioni sulla natura delle singole equazioni coinvolte.
Ad esempio

$$\begin{cases} 4x - y = 0 \\ 2^x = y \end{cases}$$

è un sistema di due equazioni in due incognite.

Risolvere un sistema di equazioni significa trovare le soluzioni comuni a TUTTE le n equazioni del sistema. Si tratta di fare l'intersezione di n insiemi: anche se tutte le equazioni hanno soluzioni, potremmo non trovare soluzioni comuni e in questo caso si dice che il sistema è impossibile.
Non ci vogliamo qui addentrare nello studio dei sistemi di equazioni: diamo solo qualche esempio che ci sarà utile nella lezione 6.

Esempi 4.20 (Sistemi lineari)

- Per risolvere il sistema $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ ricaviamo dalla seconda equazione (che è più semplice) il valore di x in dipendenza da y e lo sostituiamo nella prima equazione, che così

$$\begin{cases} 2 \cdot (-3y) + y = 2 \\ x = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = 2 \\ x = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2/5 \\ x = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2/5 \\ x = 6/5 \end{cases}$$

  ove all'ultimo passaggio abbiamo sostituito nella seconda equazione il valore di y appena trovato. Il **sistema ha una e una sola soluzione**, data da $x = 6/5$ e $y = -2/5$. ATTENZIONE A NON CONFONDERSI: abbiamo trovato "due numeri", ma la soluzione è una poiché il sistema chiede di trovare le coppie di valori da attribuire rispettivamente a x e a y perché siano soddisfatte entrambe le equazioni del sistema.

- Per risolvere il sistema $\begin{cases} y = 5x - 7 \\ 10x - 2y = 0 \end{cases}$ ricaviamo dalla seconda equazione (che è più semplice) il valore di y in dipendenza da x e lo sostituiamo nella prima equazione, che così

$$\begin{cases} 5x = 5x - 7 \\ y = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -7 \\ y = 5x \end{cases}$$

  la prima uguaglianza è impossibile e quindi il **sistema** è **impossibile**.

- Invece nel sistema $\begin{cases} y = 5x - 7 \\ 10x - 2y - 14 = 0 \end{cases}$ la seconda equazione è ottenuta dalla prima moltiplicandola per 2 e riconducendola alla forma $A(x) = 0$. Quindi non dà nessuna informazione in più rispetto alla prima: in sostanza il **sistema** equivale alla sola equazione $y = 5x - 7$ e (usando il linguaggio adottato per le equazioni) possiamo dire che è **indeterminato**. Questo sistema ha infinite soluzioni: tutte quelle della forma $x = k$, $y = 5k - 7$ ove k è un qualsiasi numero reale.

Esempi 4.21 (Sistemi di secondo grado)

- Per risolvere il sistema $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 - 2x + 2 \end{cases}$ ricaviamo dall'equazione di primo grado il valore di y in dipendenza da x e lo sostituiamo nella seconda equazione, che così

$$\begin{cases} y = x \\ x = x^2 - 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 1 \text{ oppure } x = 2 \end{cases}$$

  quindi il sistema ha due soluzioni: quella data da $x = 1$ e $y = 1$ e quella data da $x = 2$ e $y = 2$. È evidente che, quando non si voglia far confusione tra i valori di x e di y che costituiscono UNA soluzione e le varie possibili soluzioni di uno stesso sistema, si va incontro a frasi un po' troppo lunghe: per questo si preferisce sintetizzare dicendo che il sistema ha le due soluzioni $(1, 1)$ e $(2, 2)$. Il primo elemento in ciascuna coppia rappresenta il valore da dare a x e il secondo quello da dare a y.

- Per risolvere il sistema $\begin{cases} y = 3 \\ x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0 \end{cases}$ ricaviamo dall'equazione di primo grado il valore di y in dipendenza da x e lo sostituiamo nella seconda equazione, che così

$$\begin{cases} y = 3 \\ x^2 + 3^2 - 6x + 8 \cdot 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x^2 - 6x + 33 = 0 \end{cases}$$

  l'equazione in x è impossibile e quindi anche il sistema lo è.

- Per risolvere il sistema $\begin{cases} y = 3x \\ x^2 + y^2 - 2x - 5y = 0 \end{cases}$ ricaviamo dall'equazione di primo grado il valore di y in dipendenza da x e lo sostituiamo nella seconda equazione, che così

$$\begin{cases} y = 3x \\ x^2 + (3x)^2 - 2x - 5 \cdot (3x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 10x^2 - 17x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ x = 0 \text{ oppure } x = \dfrac{17}{10} \end{cases}$$

  Quindi il sistema ha due soluzioni : $(0, 0)$ e $\left(\dfrac{17}{10}, \dfrac{51}{10}\right)$.