Lezione 5
Disequazioni. Sistemi di disequazioni.

1. Disuguaglianze e disequazioni

Supponiamo di avere due espressioni che indichiamo con A e B. Chiamiamo [1] **disuguaglianza** una qualunque delle scritture

$$A < B \quad , \quad A \leq B \quad , \quad A > B \quad , \quad A \geq B.$$

Se almeno una delle due espressioni contiene delle variabili, si parla invece di **disequazione** e le variabili che in essa compaiono si dicono **incognite della disequazione**.
Trovare una soluzione di una disequazione significa trovare tanti numeri quante sono le incognite che, sostituiti ordinatamente al posto delle incognite, rendano vera la disuguaglianza.
Risolvere una disequazione significa trovarne tutte le possibili soluzioni.
Una disequazione può essere verificata

I) per *ogni* insieme di valori attribuiti alle incognite che compaiono in A e B per i quali tanto A che B abbiano senso,

OPPURE

II) per *qualche* insieme di valori attribuiti alle incognite che compaiono in A e B per i quali tanto A che B abbiano senso, *ma non per tutti*,

OPPURE

III) per *nessun* insieme di valori attribuiti alle incognite che compaiono in A e B per i quali tanto A che B abbiano senso.

Nel CASO I si dice che la **disequazione** è **identicamente verificata** (o identicamente soddisfatta).

Esempio 5.1

- $a^2 \geq 0$,
- $|x| \geq x$,
- $6 - u^2 \leq 6$,
- $x^4 + y^4 \geq 0$,
- $\dfrac{3}{4 + x^2} < 1$.

Nel CASO III, cioè quando non ci sono soluzioni, diciamo che la disequazione è **impossibile**.

[1] Abbiamo già incontrato nella lezione 4 la scrittura $A \neq B$: essa è la negazione della $A = B$ per cui in qualche testo viene chiamata disuguaglianza; qui invece usiamo la parola disuguaglianza in un senso più restrittivo, poiché vogliamo stabilire se e quando un'espressione è maggiore di un'altra, piuttosto che dire semplicemente se e quando sono diverse.

Esempio 5.2 Sono impossibili le disequazioni:

- $a^2 + b^4 < 0$,
- $\sqrt{x} < -2$,
- $|x| + 2 < 1$.

Notiamo che nel CASO II il più delle volte non si trova un numero finito di soluzioni, anche se la disequazione contiene un'incognita sola:

Esempio 5.3

- $x - 4 \geq 0$ è verificata per ogni $x \geq 4$;
- $(x-3)^2 > 0$ è verificata per ogni $x \neq 3$;

ma

- $(2x-1)^2 \leq 0$ è verificata per $x = 1/2$;
- $|x^2 - x| \leq 0$ è verificata per $x = 0$ e per $x = 1$.

2. Principi per la risoluzione delle disequazioni

Come per le equazioni, possono essere utili alcuni principi che permettono di passare da una disequazione ad un'altra *equivalente*, cioè che possiede tutte e sole le soluzioni della precedente.
Per semplicità enunciamo tali principi per disequazioni in una sola incognita, anche se la loro validità non dipende dal numero delle incognite.

1) Aggiungendo ai due membri della disequazione $A(x) > B(x)$ una stessa espressione $C(x)$, che sia definita almeno dove sono definite $A(x)$ e $B(x)$, si ottiene la disequazione equivalente
$$A(x) + C(x) > B(x) + C(x).$$
cioè
$$\boxed{A(x) > B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) + C(x) > B(x) + C(x)}$$

2) Se k è un numero o una espressione *non* contenente l'incognita e $k > 0$, allora, moltiplicando ambedue i membri della disequazione $A(x) > B(x)$ per k si ottiene la disequazione equivalente
$$kA(x) > kB(x),$$
cioè
$$\boxed{A(x) > B(x) \quad \Leftrightarrow \quad kA(x) > kB(x) \text{ per ogni } k > 0.}$$
Se invece $k < 0$, "la disequazione cambia verso", ossia:
$$\boxed{A(x) > B(x) \quad \Leftrightarrow \quad kA(x) < kB(x) \text{ per ogni } k < 0.}$$

Il primo principio consente di scrivere ogni disequazione in una delle forme
$$A(x) > 0 \quad , \quad A(x) \geq 0 \quad , \quad A(x) < 0 \quad , \quad A(x) \leq 0.$$
Il secondo, applicato con $k = -1$, consente di vedere che
$$A(x) > B(x) \quad \Leftrightarrow \quad -A(x) < -B(x).$$

Esempi 5.4

- $x + 5 \leq 3x \quad \Leftrightarrow \quad -2x + 5 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 5 \geq 0$
- $x + 3 > \dfrac{1}{x-1} \quad \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \quad x + 3 - \dfrac{1}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2 + 2x - 4}{x-1} > 0$

Nei prossimi paragrafi studiamo alcuni semplici tipi di disequazioni.

3. Disequazioni di primo grado

Una **disequazione** viene detta **di primo grado**, se, applicando i *principi per la risoluzione delle disequazioni*, può essere ricondotta a una delle seguenti forme:

$$ax + b > 0 \quad , \quad ax + b \geq 0 \quad , \quad ax + b < 0 \quad , \quad ax + b \leq 0, \qquad \text{con } a \neq 0.$$

Prima di risolvere la disequazione è opportuno usare i principi di riduzione in modo che il coefficiente a dell'incognita x risulti positivo. Infatti se $a > 0$, partendo ad esempio dalla prima forma, si ha

$$ax + b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax > -b \quad \Leftrightarrow \quad x > -b/a.$$

Esempi 5.5

- $4x + 7 > 3x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x + 9 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -9.$

  Cioè è soluzione della disequazione ogni $x > -9$; possiamo anche dire che è soluzione della disequazione ogni $x \in (-9, +\infty)$.

- $3x - 4 > 5x + 7 \quad \Leftrightarrow \quad -2x - 11 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 11 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\dfrac{11}{2}.$
- $\dfrac{x-2}{3} < \dfrac{5-x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\,(x-2) < 3(5-x) \quad \Leftrightarrow \quad 5x < 19 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 19/5).$
- $x\,(x^2 - 3) \leq 7x - 4 + x^3 \ \Leftrightarrow \ -3x \leq 7x - 4 \ \Leftrightarrow \ 10x - 4 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \geq 2/5 \ \Leftrightarrow \ x \in [2/5, +\infty).$

4. Disequazioni fratte

Proseguiamo lo studio delle disequazioni occupandoci delle disequazioni fratte, cioè di quelle disequazioni che contengono una o più espressioni fratte e in cui l'incognita compare in almeno un denominatore. Faremo prima alcune considerazioni generali e poi restringeremo l'attenzione al caso particolare delle disequazioni lineari fratte.

Ricordiamo che l'espressione $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ ha significato solo per $D(x) \neq 0$.

Utilizzando i *principi per la risoluzione delle disequazioni*, possiamo sempre riportarci a studiare una delle seguenti forme

[2] ATTENZIONE: non si possono moltiplicare i due membri della disuguaglianza per $(x-1)$ poiché quest'espressione non ha segno costante! Per questo si cerca il minimo comun denominatore.

$$\textbf{(i)}\quad \frac{N(x)}{D(x)} > 0 \qquad\qquad \textbf{(i')}\quad \frac{N(x)}{D(x)} \geq 0$$

$$\textbf{(ii)}\quad \frac{N(x)}{D(x)} < 0 \qquad\qquad \textbf{(ii')}\quad \frac{N(x)}{D(x)} \leq 0$$

Esempio 5.6 L'espressione $\dfrac{3x+2}{4x-5}$ è definita solo per $4x-5 \neq 0$ e quindi prima di iniziare lo studio della disequazione $\dfrac{3x+2}{4x-5} > 7$ dobbiamo *innanzi tutto* chiedere: $x \neq 5/4$. La disequazione data è equivalente a

$$\frac{3x+2}{4x-5} - 7 > 0 \iff \frac{3x+2-7(4x-5)}{4x-5} > 0 \iff \frac{37-25x}{4x-5} > 0.$$

Esempio 5.7 L'espressione $\dfrac{2}{1-x}$ è definita solo per $1-x \neq 0$ e quindi prima di iniziare lo studio della disequazione $\dfrac{2}{1-x} \leq \dfrac{1+x}{4}$ dobbiamo *innanzi tutto* chiedere: $x \neq 1$. La disequazione data è equivalente a

$$\frac{2}{1-x} - \frac{1+x}{4} \leq 0 \iff \frac{x^2+7}{4(1-x)} \leq 0.$$

Regole per studiare il segno di un'espressione frazionaria

Una volta riportata la disequazione fratta in una delle quattro forme appena viste, basta ricordare le seguenti tre

REGOLE

La frazione $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ *ha valore positivo se e solo se* $N(x)$ *e* $D(x)$ *hanno lo stesso segno.*

La frazione $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ *ha valore negativo se e solo se* $N(x)$ *e* $D(x)$ *hanno segni opposti.*

La frazione $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ *si annulla se e solo se si annulla il numeratore.*

Vediamo come interpretare queste regole.

Forma (i): $\dfrac{N(x)}{D(x)} > 0.$

I valori x che risolvono la disequazione sono tutti quelli per cui sia $N(x)$ che $D(x)$ assumono segno positivo, ed anche tutti quelli per cui sia $N(x)$ che $D(x)$ assumono segno negativo.

Forma (i'): $\dfrac{N(x)}{D(x)} \geq 0.$

In questo caso, basta aggiungere ai valori x per cui $\dfrac{N(x)}{D(x)} > 0$ anche i valori che rendono nulla la frazione, cioè che annullano il numeratore.

Forma (ii): $\dfrac{N(x)}{D(x)} < 0.$

I valori x che risolvono la disequazione sono tutti quelli per cui $N(x)$ assume segno positivo mentre $D(x)$ assume segno negativo, ed <u>anche</u> tutti quelli per cui $N(x)$ assume segno negativo mentre $D(x)$ assume segno positivo.

Forma (ii'): $\dfrac{N(x)}{D(x)} \leq 0.$

In questo caso, basta aggiungere ai valori x per cui $\dfrac{N(x)}{D(x)} < 0$ anche i valori che rendono nulla la frazione, cioè che annullano il numeratore.

CONSIGLIO

Le quattro forme descritte sopra sono in qualche modo intercambiabili.
Se, per un qualsiasi motivo, non ci piace lavorare con un'espressione del tipo **(ii)**, *basta cambiare segno ad uno a scelta (<u>ma solo ad uno!</u>) tra Numeratore e Denominatore, per riportarsi ad un'espressione del tipo* **(i)**.
In modo perfettamente equivalente, la stessa operazione ci fa passare dalla forma **(i)** *alla* **(ii)**.
Il discorso è identico per la coppia di forme **(i')** *e* **(ii')**.

Esempi 5.8

- Sono equivalenti tra loro tutte le disequazioni:

$$\frac{37-25x}{4x-5} > 0\ ,\quad \frac{25x-37}{4x-5} < 0\ ,\quad \frac{25x-37}{5-4x} > 0\ ,\quad \frac{37-25x}{5-4x} < 0.$$

- La disequazione $\dfrac{x^2+7}{4(1-x)} \leq 0$ è equivalente alla $\dfrac{x^2+7}{4(x-1)} \geq 0.$

5. Disequazioni lineari fratte

Lo studio del segno di $N(x)$ e/o $D(x)$ può anche essere molto difficile, se non impossibile. Un caso semplice è quello delle disequazioni lineari fratte, in cui numeratore e denominatore sono polinomi di primo grado nella variabile x. La regola vista sopra ci permette di ridurre la ricerca di soluzioni di queste disequazioni alla risoluzione di al massimo <u>due</u> disequazioni di primo grado.
L'espressione $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ di cui ci occupiamo ha la forma

$$\frac{ax+b}{cx+d} \qquad\qquad \text{dove } a, b, c, d \text{ sono numeri fissati.}$$

Supponiamo per ora:

$$\boxed{a \neq 0, \qquad c \neq 0}$$

e applichiamo le Regole per lo studio del segno alla frazione $\dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

La descrizione di quel che dobbiamo fare è semplice, ma ci resta da capire come farlo. In questo, è molto utile aiutarsi con un diagramma che tiene conto dei segni di $N(x)$ e $D(x)$.

A) Riportiamo su una retta orizzontale i valori $x = -b/a$ e $x = -d/c$ in cui si annullano, rispettivamente, numeratore e denominatore. Attenzione a riportarli nell'ordine giusto, il più grande a destra.

B) Su una riga sottostante (chiamiamola riga N), indichiamo con una linea continua la zona dove $N(x)$ è positivo, e con una linea tratteggiata quella dove $N(x)$ è negativo. Il *cambio di segno avviene in* $x = -b/a$. Indichiamo questo numero *con un punto pieno.*

C) Stesso lavoro, su una nuova riga (riga D), per il segno del denominatore. Qui, però, indichiamo *con un punto vuoto* il valore $x = -d/c$. Questo sta a significare che *questo numero non va considerato* (è la Condizione di Esistenza!).

D) Al di sotto di queste righe orizzontali c'è la risposta. Se le righe N e D hanno lo stesso tipo di grafica, la frazione $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ ha segno positivo; se la grafica è diversa, il segno è negativo. In corrispondenza del punto pieno la frazione si annulla. Il punto vuoto va escluso.

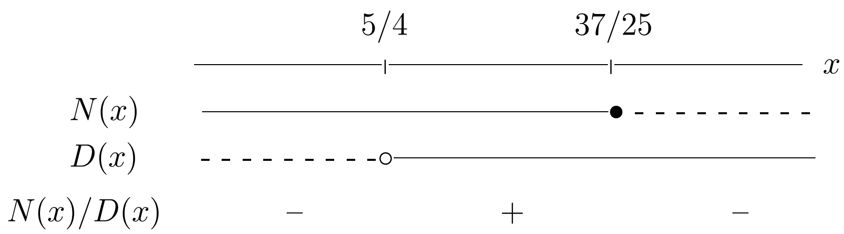
E) Controlliamo quale delle forme **(i)**, **(i')**, **(ii)**, **(ii')** stiamo studiando, e scegliamo la zona che ci interessa.

Per finire osserviamo che

- se $c = 0$ (e ovviamente $d \neq 0$) l'incognita x non appare al Denominatore e quindi ricadiamo nello studio delle disequazioni di primo grado
- nel caso $a = 0$ e $c \neq 0$ al Numeratore c'è un numero e quindi il suo segno è fisso: volendo, si può ancora usare il diagramma prestando attenzione al fatto che la riga N deve non presentare variazioni, ma è più semplice lavorare come nel successivo Esempio 5.13.

Esempio 5.9 $\qquad \dfrac{37-25x}{4x-5} > 0$

Condizione di esistenza: $4x - 5 \neq 0$, cioè $x \neq 5/4$.
Segno di $N(x)$: $37 - 25x > 0$ per $37 > 25x$, cioè $x < 37/25$; il valore $x = 37/25$ annulla $N(x)$.
Segno di $D(x)$: $4x - 5 > 0$ per $4x > 5$, cioè $x > 5/4$.
Abbiamo $5/4 = 1.25 < 1.48 = 37/25$.



Dalla tabella si trova allora che la disequazione è verificata per tutti i valori x che appartengono all'intervallo $\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{37}{25}\right)$, che possiamo anche indicare con $\dfrac{5}{4} < x < \dfrac{37}{25}$.

Esempio 5.10 $\qquad \dfrac{37-25x}{4x-5} \geq 0$

Rispetto al caso precedente, dobbiamo solo aggiungere il valore $x = 37/25$, e quindi l'insieme delle soluzioni è costituito dall'intervallo $\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{37}{25}\right]$.

Esempio 5.11 $\qquad \dfrac{37-25x}{4x-5} \leq 0.$

Le soluzioni della disequazione sono i numeri $x \in \left(-\infty, \dfrac{5}{4}\right) \cup \left[\dfrac{37}{25}, +\infty\right)$. Lo possiamo ricavare utilizzando ancora i calcoli dell'Esempio 5.9.

Esempio 5.12 Se, dovendo studiare la disequazione dell'Esempio 5.9, $\dfrac{37-25x}{4x-5} > 0$, non ci piacesse lavorare con l'incognita x moltiplicata per il coefficiente negativo -25, potremmo seguire il CONSIGLIO:

- cambiamo il segno al numeratore, ottenendo $25x - 37$;
- lasciamo invariato il denominatore, perchè il coefficiente di x è positivo;
- ricordiamoci di cambiare il verso alla disequazione.

In questo modo, dobbiamo studiare la $\dfrac{25x-37}{4x-5} < 0$, che porta (lo sapevamo già) a $x \in \left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{37}{25}\right)$.

Esempio 5.13 $\qquad \dfrac{3x-2}{5-3x} \geq -1$

Perchè la disequazione abbia senso deve essere $x \neq 5/3$.
Poi, vogliamo ottenere 0 al secondo membro; seguiamo la falsariga dell'Esempio 5.6, ed arriviamo a

$$\frac{3}{5-3x} \geq 0$$

Il numeratore non contiene x, è sempre uguale a 3, per cui la frazione non può mai annullarsi, ed assume valori positivi solo se è positivo il denominatore. Così, non abbiamo bisogno del diagramma, in quanto la nostra disequazione è equivalente a $5 - 3x > 0$, che ha come soluzione $x < 5/3$.

Esempio 5.14 $\qquad \dfrac{2x+1}{3x-4} < 2$

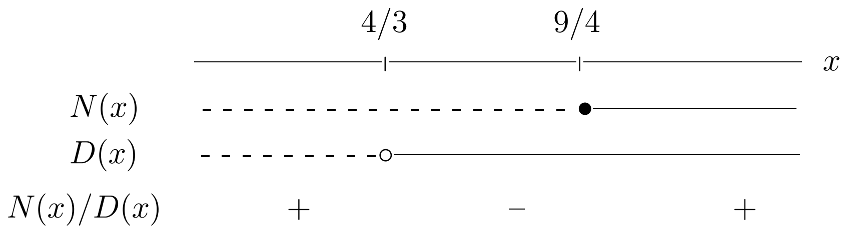
Ovviamente chiediamo $x \neq 4/3$.
Volendo ottenere 0 al secondo membro, seguiamo la falsariga dell'Esempio 5.6 ed arriviamo a

$$\frac{9-4x}{3x-4} < 0$$

Per evitare i coefficienti negativi (e le disequazioni con il verso $<$), seguiamo il CONSIGLIO dato sopra: con un cambio di segno <u>solo</u> al numeratore arriviamo a

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{4x-9}{3x-4} > 0$$

Ora tracciamo il diagramma:



Le soluzioni della disequazione sono i numeri $x \in (-\infty, 4/3) \cup (9/4, +\infty)$.

Esempio 5.15 $\qquad \dfrac{2x+3}{4x+6} > 0$

In questo caso accade che si possa risparmiare un po' di lavoro. Infatti, numeratore e denominatore sono multipli tra loro e, pur di richiedere $x \neq -3/2$ (è la condizione di esistenza), arriviamo a

$$\frac{2x+3}{4x+6} = \frac{2x+3}{2(2x+3)} = \frac{1}{2};$$

dunque la disequazione equivale alla richiesta $1/2 > 0$, che è sempre vera. Perciò le soluzioni della disequazione assegnata sono tutti i valori di x, escluso $-3/2$.

Situazioni analoghe a questa si presentano ogni volta che le coppie di numeri (a, b) e (c, d) sono proporzionali; in dipendenza dal verso della disuguaglianza e dal segno di $\dfrac{a}{c}$, può verificarsi solo uno dei due casi seguenti

- la disequazione non ha alcuna soluzione,
- la disequazione ha per soluzione ogni $x \neq -\dfrac{d}{c}$.

6. Sistemi di disequazioni

Un sistema di disequazioni consiste in un certo numero n ($n \geq 2$) di disequazioni che vogliamo siano verificate contemporaneamente. Il simbolo grafico utilizzato per denotare questa collezione di disequazioni è quello della parentesi graffa che "abbraccia" n righe, in ognuna delle quali sta scritta una disequazione

$$\begin{cases} \textit{prima diseq.} \\ \textit{seconda diseq.} \\ ..... \\ n - \textit{sima diseq.} \end{cases}$$

Per evitare eccessi di generalità, limitiamoci al caso in cui tutte le disequazioni del sistema coinvolgono la stessa, unica, variabile reale x. In ciascuna riga non vi sono, a priori, restrizioni sulla natura delle singole disequazioni coinvolte.
Abbiamo visto in precedenza che possiamo sempre ricondurre una disequazione ad una forma "standard" in cui una certa quantità $A(x)$ viene confrontata con il valore 0. Così, un sistema di n disequazioni nella variabile x assume l'aspetto

$$(*) \qquad \begin{cases} A_1(x) > 0 \\ A_2(x) > 0 \\ ..... \\ A_n(x) > 0 \end{cases}$$

dove in qualche riga il simbolo $>$ potrebbe anche essere sostituito da $\geq$, $<$, $\leq$.

Esempio 5.16

$$\begin{cases} \dfrac{4x-9}{3x-4} > 0 \\ 5^{2x} < 1 \end{cases}$$

è un sistema di due disequazioni, di cui la prima lineare fratta.

Regole per la soluzione di sistemi di disequazioni

Alla base della risoluzione di un sistema di disequazioni c'è la seguente semplice

REGOLA

un numero è soluzione del sistema se e solo se è soluzione di TUTTE le singole disequazioni.

Questo significa che per risolvere un sistema della forma $(*)$ dobbiamo

i) risolvere le singole disequazioni separatamente;

ii) considerare l'intersezione degli n insiemi di soluzioni ottenuti.

Anche in questa situazione l'utilizzo di un <u>diagramma</u> può essere utile, ma

ATTENZIONE: il significato di questo diagramma non va confuso con quello del diagramma introdotto nel paragrafo 5 !

A) Riportiamo su una retta orizzontale i valori significativi ottenuti studiando le singole disequazioni del sistema.

B) Su una riga sottostante indichiamo con una linea continua <u>solo</u> la zona dove la prima disequazione è soddisfatta, lasciando bianca la zona dove la prima disequazione non è soddisfatta.

C) Stesso lavoro per tutte le altre disequazioni, studiate singolarmente.

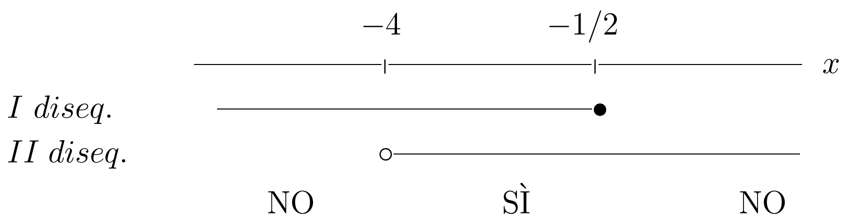
D) La risposta: il sistema è soddisfatto solo dagli x che appartengono alle zone in cui <u>tutte</u> le righe sono continue.

In questo diagramma
“ $\bullet$ ” significa che il numero è soluzione della disequazione;
“ $\circ$ ” significa che il numero *non* è soluzione della disequazione.

Esempio 5.17

$$\begin{cases} 2x+1 \leq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}$$

Abbiamo due disequazioni di primo grado, soddisfatte per $x \in (-\infty, -1/2]$ e per $x \in (-4, +\infty)$ rispettivamente. Ne risulta il diagramma

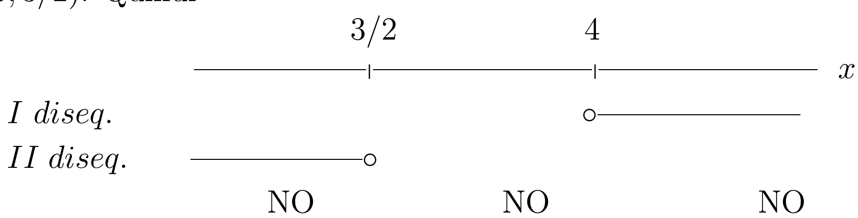


e quindi le soluzioni del sistema sono gli $x \in (-4, -1/2]$.

Esempio 5.18

$$\begin{cases} x-4 > 0 \\ 3-2x > 0 \end{cases}$$

Sono ancora due disequazioni di primo grado, aventi soluzioni rispettivamente $x \in (4, +\infty)$ e $x \in (-\infty, 3/2)$. Quindi



ed il sistema non ha soluzioni.

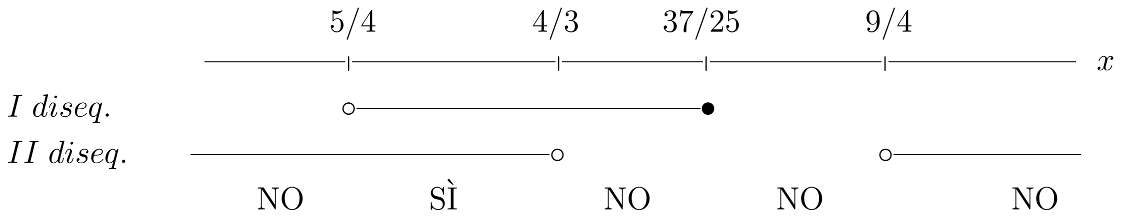
Esempio 5.19

$$\begin{cases} \dfrac{37-25x}{4x-5} \geq 0 \\[2mm] \dfrac{2x+1}{3x-4} < 2 \end{cases}$$

In questo esempio abbiamo due disequazioni lineari fratte. Abbiamo già visto, negli Esempi 5.10 e 5.14, che la prima disequazione è soddisfatta per $x \in \left(\frac{5}{4}, \frac{37}{25}\right]$, mentre la seconda lo è per $x \in (-\infty, 4/3) \cup (9/4, +\infty)$.
L'unico lavoro che resta da fare è quello di riportare i valori trovati, e poi tracciare le righe continue in corrispondenza delle regioni desiderate. Non è importante che la scala delle distanze sia rispettata, purchè l'ordine sia corretto. Poichè

$$\frac{5}{4} = 1.25 < \frac{4}{3} = 1.\overline{3} < \frac{37}{25} = 1.48 < \frac{9}{4} = 2.25$$

ne risulta il diagramma

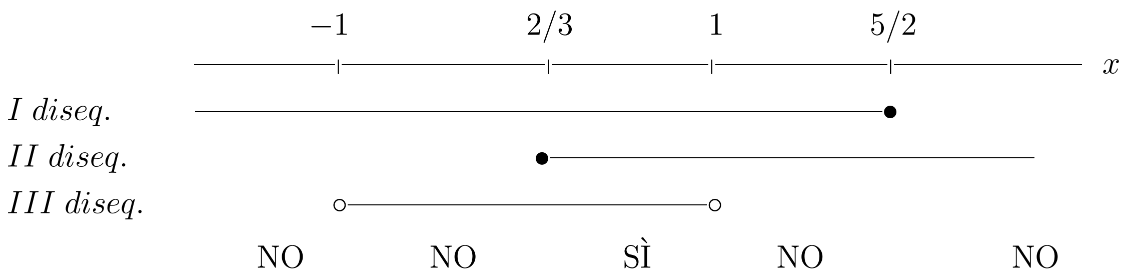


e quindi le soluzioni del sistema sono gli $x \in \left(\frac{5}{4}, \frac{4}{3}\right)$.

Esempio 5.20

$$\begin{cases} 2x-5 \leq 0 \\ 3x \geq 2 \\ x^2-1<0 \end{cases}$$

Si tratta di due disequazioni di primo grado, soddisfatte per $x \in (-\infty, 5/2]$ e per $x \in [2/3, +\infty)$ rispettivamente, e di una (facile) disequazione di secondo grado, soddisfatta per $x \in (-1, 1)$. Così



per cui le soluzioni del sistema sono gli $x \in [2/3,\ 1)$.

7. Disequazioni e sistemi di disequazioni: applicazioni

Esempio 5.21 Determiniamo per quali valori della variabile reale x ha significato l'espressione

$$\operatorname{Log}\left(\frac{x-1}{x+5}\right)$$

È bene ricordare che è possibile parlare di logaritmo di una quantità <u>solo</u> nel caso in cui la quantità in questione sia positiva.
Perciò, oltre alla richiesta $x+5 \neq 0$, necessaria per dare senso alla frazione, dobbiamo chiedere che risulti $\dfrac{x-1}{x+5} > 0$.
Questo porta a concludere che l'espressione ha senso per $x \in (-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$.

Esempio 5.22 Determiniamo per quali valori della variabile reale x ha significato l'espressione

$$\operatorname{Log}\left(2-\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}\right)$$

In questo caso le richieste sono tre:

- la presenza di un denominatore impone che questo non si annulli (quindi $3-x \neq 0$);
- la presenza di una radice di indice pari impone che l'espressione in essa contenuta non possa essere negativa (quindi $\dfrac{x+2}{3-x} \geq 0$);
- la presenza di un logaritmo richiede che il suo argomento sia positivo (quindi $2-\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}} > 0$).

Si arriva perciò al sistema

$$\begin{cases} x \neq 3 \\ \dfrac{x+2}{3-x} \geq 0 \\ 2-\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}} > 0 \end{cases}$$

La seconda disequazione è lineare fratta, e porta a $x \in [-2, 3)$.
La terza, quando $x \in [-2, 3)$, può essere ricondotta alla disequazione lineare fratta:

$$4 > \frac{x+2}{3-x} \qquad \text{cioè} \qquad \frac{5(2-x)}{3-x} > 0$$

il che porta a chiedere $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.
Intersecando gli insiemi delle soluzioni, otteniamo infine $x \in [-2, 2)$.