Lezione 1
Insiemi e numeri

1. Nozione di insieme, sottoinsieme, appartenenza

Con la parola **insieme** intendiamo una collezione di oggetti detti suoi **elementi.** Ogni insieme è denotato con lettere maiuscole e i suoi elementi con lettere minuscole.

Esempio 1.1 Se A è l'insieme delle vocali della parola musica si scrive

$$A = \{u, i, a\}.$$

Esempio 1.2 I numeri $0, 1, 2, 3, \ldots$ formano un insieme che indichiamo con $\mathbb{N}$ e chiamiamo insieme dei **numeri naturali**.

Nel primo esempio abbiamo indicato un insieme (finito) elencando i suoi elementi. Un altro modo di definire un insieme può essere quello di dare una sua proprietà caratteristica, ad esempio: "sia B l'insieme dei numeri naturali divisibili per 3". Possiamo allora scrivere:

$$B = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}.$$

Se A è un insieme e a è un suo elemento si scrive $a \in A$ e si legge "a appartiene ad A". Per indicare che a non è un elemento di A si scrive $a \notin A$.
Ad esempio: $18 \in B$ e $5 \notin B$. Utilizzando il simbolo $\in$ possiamo riscrivere in modo più preciso l'insieme B:

$$B = \{b \in \mathbb{N} \text{ tali che } b = 3n, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si dice che un insieme B è un **sottoinsieme** di A (o che B è **contenuto** in A) se ogni elemento b dell'insieme B è anche un elemento di A. In simboli:

$$B \subseteq A \qquad \text{(o anche: } A \supseteq B).$$

Esempio 1.3 Siano $A = \{u, i, a\}$ e $B = \{u, i\}$, allora si ha $B \subseteq A$.

Esempio 1.4 Sia B l'insieme dei numeri naturali multipli di 3 e sia C l'insieme dei numeri naturali multipli di 12. Allora si ha $C \subseteq B$.

Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ allora $A = B$. Questo è il modo per verificare che i due insiemi A e B sono uguali (coincidono).

2. Intersezione e unione di insiemi. Insieme complementare

Definizione 1.5 L'insieme degli elementi che appartengono contemporaneamente ad A e a B è detto **intersezione** di A e B e denotato $A \cap B$. Si scrive

$$A \cap B = \{s \text{ tali che } s \in A \text{ e } s \in B\}.$$

Esempio 1.6 Siano $A = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$ e $B = \{c, d, 1, 2\}$. Allora

$$A \cap B = \{c, 1, 2\}.$$

Esempio 1.7 Sia A l'insieme dei numeri naturali multipli di 2 e sia B l'insieme dei numeri naturali multipli di 3. Determiniamo $A \cap B$.
Un elemento d è contemporaneamente in A e in B se e solo se è divisibile contemporaneamente per 2 e 3: ossia è un multiplo di 6. Cioè

$$A \cap B = \{0, 6, 12, \dots\} = \{d \in \mathbb{N} \text{ tali che } d = 6n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}.$$

Due insiemi possono *non* avere elementi comuni. In tal caso si dice che essi sono **disgiunti**, o che la loro intersezione è l'**insieme vuoto**, indicato con $\emptyset$, insieme caratterizzato dal non avere elementi.

Esempio 1.8 Siano A e B gli insiemi costituiti dai punti di due rette diverse nel piano. Allora $A \cap B$ è l'insieme vuoto se le rette sono parallele; in caso contrario, $A \cap B$ è un solo punto del piano.

Definizione 1.9 L'insieme degli elementi che appartengono ad *almeno uno* degli insiemi A e B è detto **unione** di A e B e denotato $A \cup B$. Si scrive

$$A \cup B = \{s \text{ tali che } s \in A \text{ oppure } s \in B\}.$$

Esempio 1.10 Siano $A = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$ e $B = \{c, d, 1, 2\}$, allora

$$A \cup B = \{a, b, c, d, 1, 2, 3\}.$$

Esempio 1.11 Sia A l'insieme dei numeri naturali minori di 21 e B l'insieme dei numeri naturali maggiori di 21. Allora $A \cup B$ è l'insieme dei numeri naturali diversi da 21.

Se un insieme A è contenuto in un insieme S, si possono considerare gli elementi di S che non sono in A. A questa idea corrisponde la nozione di *insieme complementare*.

Definizione 1.12 Sia S un insieme che si suppone fissato e sia $A \subseteq S$. L'insieme degli elementi che appartengono ad S e non appartengono ad A è detto **complementare** di A (in S) e denotato con A^c. Si scrive:

$$A^c = \{s \in S \text{ tali che } s \notin A\}.$$

Esempio 1.13 Siano $S = \{a, b, c, d, e, f, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$. Allora $A^c = \{d, e, f, 4, 5\}$.

Esempio 1.14 Siano $S = \mathbb{N}$ e A l'insieme dei numeri naturali pari. Allora A^c è l'insieme dei numeri naturali dispari.

3. Insiemi numerici

Abbiamo già introdotto l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.
Denotiamo con $\mathbb{Z}$ l'insieme degli **interi relativi,** ossia dei numeri**:** $0, 1, -1, 2, -2, \dots$
Denotiamo con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei **numeri razionali.**

Ogni numero razionale può essere rappresentato da una frazione della forma $\dfrac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.
Due frazioni $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}$ rappresentano lo stesso numero razionale quando $ad = bc$.
Quindi le frazioni $\dfrac{-14}{35}$ e $\dfrac{4}{-10}$ rappresentano lo stesso numero razionale che possiamo indicare più semplicemente con $-\dfrac{2}{5}$.
È spesso utile saper **confrontare** due frazioni (ossia stabilire quale delle due è maggiore). Siano $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}$ due frazioni con denominatore maggiore di zero (ossia $b > 0$ e $d > 0$). Diciamo che

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{se e solo se} \quad ad < bc.$$

Esempio 1.15 Confrontiamo le seguenti coppie di frazioni: $\dfrac{3}{10}$, $\dfrac{4}{13}$ e $-\dfrac{2}{7}$, $-\dfrac{3}{11}$.

- $\dfrac{3}{10} < \dfrac{4}{13}$ infatti $3 \cdot 13 = 39, \quad 4 \cdot 10 = 40 \quad$ e $\quad 39 < 40$.
- $-\dfrac{2}{7} < -\dfrac{3}{11}$ infatti $(-2) \cdot 11 = -22, \quad (-3) \cdot 7 = -21 \quad$ e $\quad -22 < -21$.

Ricordiamo che la **somma** e il **prodotto** di due frazioni si eseguono come segue

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Inoltre si ha: $\dfrac{a}{b} = 0$ se e solo se $a = 0$.
(Ricordiamo che il <u>denominatore non può MAI essere uguale a zero</u>.)
Data una frazione $\dfrac{a}{b}$ con $a \neq 0$ e $b \neq 0$ si dice **frazione reciproca** di $\dfrac{a}{b}$ la frazione $\dfrac{b}{a}$.
Abbiamo allora che

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Effettuare la **divisione** di $\dfrac{a}{b}$ per $\dfrac{c}{d}$ (con $c \neq 0$ e $d \neq 0$) significa moltiplicare $\dfrac{a}{b}$ per il reciproco di $\dfrac{c}{d}$, cioè:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \; = \; \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \; = \; \frac{ad}{bc}.$$

Esempio 1.16 $\dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{4} : \dfrac{9}{2} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{2 \cdot 6 - 1 \cdot 5}{30} = \dfrac{12 - 5}{30} = \dfrac{7}{30}$.

Esempio 1.17 Vogliamo determinare per quali interi $n > 0$ si ha che la differenza delle due frazioni

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

è minore di $\frac{1}{10}$. Deve essere

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{10},$$

ossia

$$n(n+1) > 10$$

che è evidentemente verificata per $n \geq 3$.

Ogni numero razionale può essere rappresentato con sviluppo decimale *finito* o *infinito periodico*. Ad esempio:

$$-\frac{1}{4} = -0.25; \qquad \frac{7}{5} = 1.4; \qquad \frac{1}{3} = 0.\overline{3}; \qquad \frac{1}{6} = 0.1\overline{6}.$$

I numeri corrispondenti a sviluppi decimali *infiniti non periodici* come

$$\sqrt{2} = 1.414213562\ldots \qquad ; \pi = 3.141592654\ldots$$

sono detti numeri **irrazionali**.

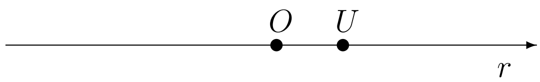
Definizione 1.18 L'unione dei numeri razionali e degli irrazionali costituisce l'insieme dei numeri **reali**, che viene indicato con $\mathbb{R}$.

Una descrizione rigorosa dell'insieme dei numeri reali è al di là degli obiettivi di queste lezioni. Naturalmente si ha

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Dati i numeri reali a e b è sempre definita la somma $a+b$ (la sottrazione $a-b$) e la moltiplicazione $a \cdot b$ (e, se $b \neq 0$, la divisione $a : b$, che spesso si indica con la notazione $\frac{a}{b}$).
In particolare, dato il numero reale a, chiamiamo **opposto** di a il numero $-a$ e, se $a \neq 0$, chiamiamo **reciproco** di a il numero $\frac{1}{a}$.

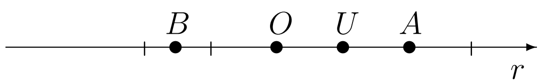
È spesso comodo visualizzare i numeri reali come "punti di una retta". Per far questo consideriamo la retta r e su di essa fissiamo un punto O (origine), un segmento OU come unità di misura e un verso di percorrenza da considerarsi positivo: in questo modo abbiamo costruito una **retta orientata**.



Sia ora a un numero reale non nullo: partendo da O ci muoviamo sulla retta orientata

- se $a > 0$ nel verso positivo della retta, di un segmento OA di lunghezza a;
- se $a < 0$ nel verso negativo della retta, di un segmento AO di lunghezza $-a$.

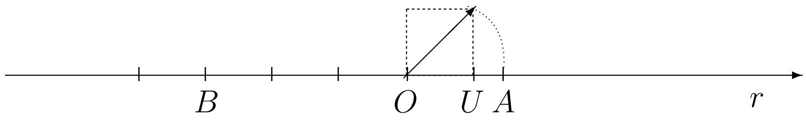
In entrambi i casi associamo al numero a l'estremo finale del segmento OA. (Al numero 0 associamo il punto O.) Così ad ogni numero reale abbiamo associato un punto della retta orientata.
Ad esempio nella figura sottostante al numero 2 associamo il punto A, al numero reale $-\frac{3}{2}$ associamo il punto B.



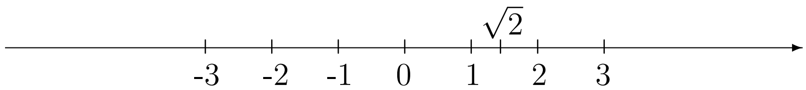
Viceversa, dato un punto A sulla retta orientata

- se A segue O nel verso positivo della retta, associamo ad A il numero reale che esprime la misura del segmento OA rispetto all'unità di misura OU;
- se A precede O nel verso positivo della retta, associamo ad A l'opposto del numero reale che esprime la misura del segmento OA rispetto all'unità di misura OU.

Così ad ogni punto della retta orientata abbiamo associato uno (e un solo) numero reale.
Ad esempio nella figura sottostante al punto U associamo il numero reale 1, al punto A associamo $\sqrt{2}$ (OA è la diagonale del quadrato di lato OU), e al punto B associamo -3.



Questo ci permette di identificare i punti della retta orientata con i numeri reali e quindi spesso si pongono sulla retta direttamente i numeri invece dei punti. In questo contesto i numeri si chiamano **ascisse** dei punti corrispondenti.



La distanza (rispetto all'unità di misura fissata) di un punto A di ascissa a da O è sempre un numero non negativo dato da:

- a se $a \geq 0$;
- $-a$ se $a < 0$.

Abbiamo così introdotto il **modulo** (o valore assoluto) $|a|$ del numero reale a che è così definito:

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{se} \quad a < 0 \\ a & \text{se} \quad a \geq 0 \end{cases}$$

Ad esempio: $|-2| = -(-2) = 2$; $|3| = 3$; $\left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$; $|0.4| = 0.4$; $|0| = 0$.

Concludendo $|a|$ rappresenta la distanza del punto di ascissa a dall'origine O, e quindi è sempre $|a| \geq 0$.
In generale, $|a-b|$ rappresenta la lunghezza del segmento di estremi A e B aventi ascisse a e b. Quindi è sempre $|a-b| = |b-a|$.

Esempio 1.19 L'insieme $A = \{a \in \mathbb{R} \text{ tali che } |a| < 2\}$ è costituito dai numeri reali che sono ascisse di punti a distanza minore di 2 dall'origine. Sono quindi tutti i numeri reali compresi tra -2 e 2. Ossia

$$A = \{a \in \mathbb{R} \text{ tali che } -2 < a < 2\}.$$

Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ della forma di quello dell'esempio precedente è un intervallo.
Si chiamano **intervalli** i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } a < x < b\}$ intervallo limitato aperto
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } a \leq x \leq b\}$ intervallo limitato chiuso

- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } a \leq x < b\}$ intervallo limitato chiuso a sinistra (e aperto a destra)
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x < b\}$ intervallo aperto illimitato (a sinistra) o semiretta
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x \geq a\}$ intervallo illimitato (a destra) o semiretta
- $(a, b]$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$ sono definiti analogamente.

L'insieme A dell'esempio precedente è quindi l'intervallo $(-2, 2)$.

4. Proporzioni, scale e percentuali

Consideriamo un treno che viaggia alla velocità costante di 110 chilometri all'ora. Ovviamente in 30 minuti percorre 55 chilometri, in due ore 220. E se volessimo sapere in quanto tempo ha percorso 242 chilometri?
Osserviamo che il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato è costante (purchè spazi e tempi siano rispettivamente espressi nella stessa unità di misura), ossia

$$\frac{110}{60} = \frac{55}{30} = \frac{220}{120} = \ldots$$

Quindi, detto T il tempo (in minuti) necessario a percorrere 242 chilometri si ha:

$$\frac{110}{60} = \frac{242}{T} \qquad \text{cioè} \qquad 110 \cdot T = 60 \cdot 242 \qquad \text{cioè} \qquad T = \frac{60 \cdot 242}{110} = 132,$$

ossia 2 ore e 12 minuti.
In generale, si usa esprimere l'uguaglianza dei rapporti: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ usando la scrittura

$$a : b = c : d$$

che si chiama **proporzione** e che si legge "a sta a b come c sta a d".

Esempio 1.20 La tariffa applicata per chiamate da un telefono pubblico è a scatti e ogni scatto costa 10 centesimi di Euro. Per chiamate verso la Lituania la durata di ogni scatto è di 8.2 secondi. Vogliamo calcolare il costo C (in centesimi di Euro) a minuto che quindi soddisfa la proporzione

$$10 : 8.2 = C : 60$$

Ricaviamo quindi che $C = \frac{6000}{82} \simeq 73.17$ centesimi di Euro.

Esempio 1.21 La detrazione fiscale per lavoro dipendente è di 1 150 Euro su base annuale (365 giorni di lavoro). Calcoliamo la detrazione D spettante ad un lavoratore che ha lavorato 87 giorni nel corso dell'anno. Si avrà

$$1\,150 : 365 = D : 87$$

Ricaviamo quindi che $D = \frac{1\,150 \cdot 87}{365} \simeq 274.1$ Euro.

Nel linguaggio topografico dire che una cartina, o un atlante, "è in scala $1 : 200\,000$" significa che il rapporto tra le distanze riportate sulla carta e quelle reali è $\frac{1}{200\,000}$.

Ossia, se su una cartina di questo tipo la distanza tra due paesi è di 3.5 centimetri, la loro distanza effettiva D (in centimetri!!) è tale che

$$1 : 200\,000 = 3.5 : D$$

cioè $D = 700\,000$ cm $= 7\,000$ m $= 7$ km.

Il rapporto tra due grandezze omogenee (ossia dello stesso tipo[1]) è un numero che non dipende dall'unità usata per misurare entrambe. Ad esempio, se, in una classe di 25 studenti, 3 hanno l'influenza, possiamo dire che i $\frac{3}{25}$ della classe è ammalato.
Si usa spesso esprimere il rapporto di grandezze omogenee in forma **percentuale** ossia scrivendo la frazione in modo che il denominatore sia 100. Nell'esempio

$$\frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 0.12.$$

Più brevemente si scrive 12% e si dice la percentuale di ammalati è il 12% (e si legge 12 *per cento*).
Non sempre è possibile esprimere un rapporto esattamente in forma percentuale, talvolta bisogna approssimarlo: ad esempio

$$\frac{1}{3} = 33\% \quad \textit{circa} \text{ e si scrive } \frac{1}{3} \simeq 33\%.$$

Esempio 1.22 Il fondo di investimento "SoldiPiù" nel 2000 ha guadagnato il 25%, mentre nel 2001 ha perso il 20%. Vogliamo calcolare quale è stato il rendimento su base biennale.
Supponiamo che la somma investita all'inizio del 2000 fosse C. Alla fine del primo anno la somma è aumentata del 25% ossia è

$$C + \frac{25}{100} \cdot C = \frac{5}{4} \cdot C.$$

Nel 2001 quest'ultima è diminuita del 20% ossia è diventata:

$$\left(\frac{5}{4} \cdot C\right) - \frac{20}{100}\left(\frac{5}{4} \cdot C\right) = \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{4} \cdot C\right) = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{4} \cdot C\right) = C.$$

Quindi il rendimento biennale è stato nullo, ossia il bilancio biennale è stato di perfetto pareggio.

Esempio 1.23 Il fondo di investimento "SoldiPiù Plus" ha perso nell'ultimo anno il 17.5%. Sapendo che ora le quote in possesso valgono 66 000 Euro, quale era il capitale investito l'anno scorso?
Detto C il capitale iniziale, sappiamo che dopo la perdita del 17.5% il capitale è diventato

$$C - \frac{175}{1\,000} \cdot C = \frac{33}{40} \cdot C = 66\,000$$

quindi $C = \dfrac{40}{33} \cdot 66\,000 =$80 000 Euro.

[1] Ad esempio due lunghezze entrambe espresse in metri, oppure due capacità entrambe espresse in litri.