Lezione 7
Soluzioni Esercizi

Sol. Ex. 7.1.

a) $(12.12)^\circ = 12^\circ\ 7'\ 12''$ **b)** $(23.7)^\circ = 23^\circ\ 42'$ **c)** $\left(\frac{13}{4}\right)^\circ = 3^\circ\ 15'$ **d)** $(15.21)^\circ = 15^\circ\ 12'\ 36''$

e) $\left(\frac{55}{18}\right)^\circ = 3^\circ\ 3'\ 20''$ **f)** $2752'' = 45'\ 52''$ **g)** $222' = 3^\circ\ 42'$ **h)** $\left(\frac{313}{3}\right)' = 1^\circ\ 44'\ 20''$

Sol. Ex. 7.2.

Da $\alpha_{rad} = \alpha_{gr} \times \dfrac{\pi}{180^\circ}$, si ottiene:

a) $\dfrac{\pi}{15}$ **b)** $\dfrac{\pi}{10}$ **c)** $\dfrac{3\pi}{4}$ **d)** $\dfrac{\pi}{180} \simeq 0.0175$ **e)** $\dfrac{49\pi}{60}$

Sol. Ex. 7.3.

Da $\alpha_{gr} = \alpha_{rad} \times \dfrac{180^\circ}{\pi}$, si ottiene:

a) 240° **b)** 105° **c)** $67^\circ 30'$ **d)** $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ \simeq (57.296)^\circ \simeq 57^\circ 17' 46''$

Sol. Ex. 7.4.

Da $\alpha_{rad} = \dfrac{l}{r}$ e $\alpha_{gr} = \alpha_{rad} \times \dfrac{180^\circ}{\pi}$, si ottiene:

a) $\alpha_{rad} = \dfrac{5}{2}$ e $\alpha_{gr} \simeq (143.24)^\circ = 143^\circ 14' 24''$ (arrotondamento per eccesso)

b) $\alpha_{rad} = \dfrac{1}{3}$ e $\alpha_{gr} \simeq (19.10)^\circ = 19^\circ 6'$ (arrotondamento per eccesso)

c) $\alpha_{rad} = 1$ e $\alpha_{gr} \simeq (57.30)^\circ = 57^\circ 18'$ (arrotondamento per eccesso)

d) $\alpha_{rad} = 0.12$ e $\alpha_{gr} \simeq (6.88)^\circ = 6^\circ 52' 48''$ (arrotondamento per eccesso)

Sol. Ex. 7.5.

Si ha $\dfrac{l}{r} = 4$ e $l = 3$ m; dunque $d = 2r = 2 \cdot \dfrac{3}{4} = 1.5$ m.

Sol. Ex. 7.6.

Da $\alpha_{rad} = \dfrac{\pi}{180^\circ}\alpha_{gr}$, si ottiene $\alpha_{rad} = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot 44^\circ = \dfrac{11\pi}{45} \simeq 0.77$ (arrotondamento per eccesso).

Sol. Ex. 7.7. [1]

$$\sin\alpha = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5} = 0.6, \;\; \cos\alpha = \frac{\sqrt{(0.5)^2 - (0.3)^2}}{0.5} = \frac{0.4}{0.5} = \frac{4}{5} = 0.8 \;, \tan\alpha = \frac{0.3}{0.4} = \frac{3}{4} = 0.75 \;;$$

$$\sin\beta = \cos\alpha = \frac{4}{5}, \cos\beta = \sin\alpha = \frac{3}{5} \;, \tan\beta = \frac{4}{3} = 1.\overline{3} \;.$$

Sol. Ex. 7.8.

a) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\qquad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\qquad \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$

b) Si ha $\frac{11}{3}\pi = 4\pi - \frac{\pi}{3}$. Quindi

$$\sin\left(\frac{11}{3}\pi\right) = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;,$$

$$\cos\left(\frac{11}{3}\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \tan\left(\frac{11}{3}\pi\right) = -\sqrt{3} \;.$$

c) $\sin(357\pi) = \sin(\pi) = 0, \qquad \cos(357\pi) = \cos(\pi) = -1, \qquad \tan(357\pi) = \tan(\pi) = 0$.

d) $\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = 1 \;.$$

e) Si ha $-\frac{27}{2}\pi = \frac{\pi}{2} - 14\pi$. Quindi

$$\sin\left(-\frac{27}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 14\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad \cos\left(-\frac{27}{2}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$\tan\left(-\frac{27}{2}\pi\right)$ non è definita.

f) $\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \qquad \cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$

$$\tan\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

g) $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$

$$\tan\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\sqrt{3}.$$

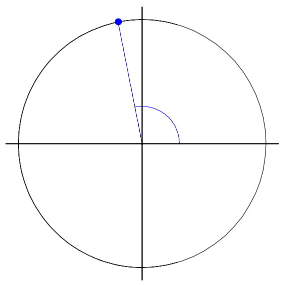
[1] Noto il seno di un angolo α, il suo coseno si può ricavare dall'identità fondamentale. Nella soluzione della prima parte di questo esercizio si sceglie invece di usare direttamente la definizione di coseno.

Sol. Ex. 7.9.

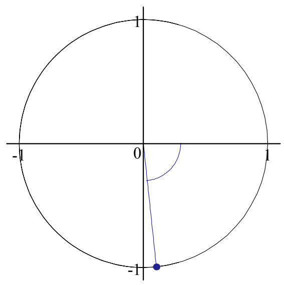
Osservare che:

- ▷ $\frac{9}{16}\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$ e quindi il corrispondente punto P sulla circonferenza goniometrica sta nel II quadrante, "vicino all'asse y";
- ▷ $-\frac{7}{15}\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{30}\pi$ e quindi il corrispondente punto P sulla circonferenza goniometrica sta nel IV quadrante, "molto vicino all'asse y";
- ▷ $\frac{23}{20}\pi = \pi + \frac{3\pi}{20}$ è minore, ma non molto, di $\pi + \frac{\pi}{6}$: quindi il corrispondente punto P sulla circonferenza goniometrica sta nel III quadrante, "molto vicino" al punto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$;
- ▷ $-\frac{5}{9}\pi = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{18}\pi$ e quindi il corrispondente punto P sulla circonferenza goniometrica sta nel III quadrante, "vicino all'asse y";
- ▷ $-\frac{7}{18}\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{9}\pi$ e quindi il corrispondente punto P sulla circonferenza goniometrica sta nel IV quadrante, "vicino all'asse y".

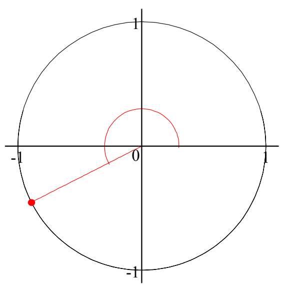
La maggiore o minore vicinanza all'asse y si legge sulla frazione di π che si aggiunge o si toglie a $\frac{\pi}{2}$ (o a $-\frac{\pi}{2}$). Le informazioni richieste si leggono agevolmente sui grafici così ricavati.



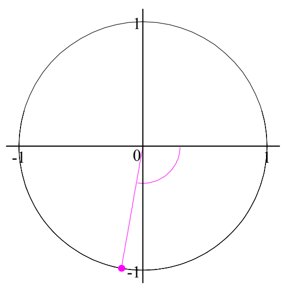
$\frac{9}{16}\pi$



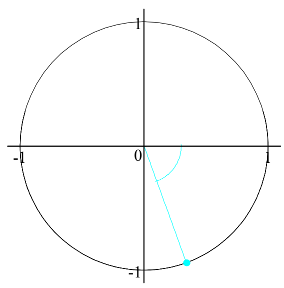
$-\frac{7}{15}\pi$



$\frac{23}{20}\pi$



$-\frac{5}{9}\pi$



$-\frac{7}{18}\pi$

a) sono positivi $\sin\left(\frac{9}{16}\pi\right)$, $\cos\left(-\frac{7}{15}\pi\right)$, $\cos\left(-\frac{7}{18}\pi\right)$, $\tan\left(\frac{23}{20}\pi\right)$ e $\tan\left(-\frac{5}{9}\pi\right)$;

b) $\tan\left(-\frac{7}{15}\pi\right) < \tan\left(\frac{9}{16}\pi\right) < \tan\left(-\frac{7}{18}\pi\right) < \tan\left(\frac{23}{20}\pi\right) < \tan\left(-\frac{5}{9}\pi\right)$;

c) $\triangleright$ $\dfrac{9}{16}\pi = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{16}$: poiché $\dfrac{\pi}{16}$ è un angolo abbastanza piccolo (corrisponde a $11°15'$), $\sin\left(\dfrac{9}{16}\pi\right)$ è abbastanza prossimo a 1 (vale circa 0.98);

$\triangleright$ $-\dfrac{7}{15}\pi = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{30}$: poiché $\dfrac{\pi}{30}$ è un angolo abbastanza piccolo (corrisponde a $6°$), $\cos\left(-\dfrac{7}{15}\pi\right)$ è abbastanza prossimo a 0 (vale circa 0.1);

$\triangleright$ $\dfrac{23}{20}\pi = \pi + \dfrac{3\pi}{20} < \pi + \dfrac{\pi}{6}$ e quindi $\sin\left(\dfrac{23}{20}\pi\right) = -\sin\left(\dfrac{3\pi}{20}\right)$ è in realtà <u>maggiore di</u> $-0.5 = -\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)$;

$\triangleright$ $-\dfrac{3}{4}\pi < -\dfrac{5}{9}\pi < -\dfrac{\pi}{2}$: quindi $\tan\left(-\dfrac{5}{9}\pi\right)$ è maggiore di $1 = \tan\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)$;

$\triangleright$ $-\dfrac{7}{18}\pi < -\dfrac{\pi}{3}$: quindi $\cos\left(-\dfrac{7}{18}\pi\right)$ è minore di $0.5 = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Sol. Ex. 7.10.

a) $\sin\left(\dfrac{5}{12}\pi\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{4}\sqrt{6} \simeq 0.97$,

$$\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \simeq 0.26 \ ,$$

$$\tan\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}}{\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3} \simeq 3.73 \ .$$

b) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{4}\sqrt{6} \simeq 0.97$,

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \simeq -0.26 \ ,$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \tan\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\tan\left(\frac{5}{12}\pi\right) = -\left(2 + \sqrt{3}\right) \simeq -3.73 \ .$$

Sol. Ex. 7.11.

La spiaggia e la cima costituiscono gli estremi dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, di cui si conoscono un angolo acuto α ed il lato opposto (che misura 560 m). La distanza che vogliamo trovare corrisponde alla misura del lato adiacente ad α che si ricava da $\tan\alpha = \dfrac{opp}{adiac}$, dopo aver calcolato la tangente di α. Visto che $\tan(4°30') \simeq 0.08$, l'isola dista dalla spiaggia circa $\dfrac{560}{0.08}$ m $= 7$ Km.

Sol. Ex. 7.12.

Si conosce la misura dell'ipotenusa (lunghezza del tratto di pista: 500 m) e un angolo acuto α di un triangolo rettangolo: il lato opposto dà la variazione di quota, che può essere ricavato da $\sin\alpha = \frac{opp}{ipot}$, dopo aver calcolato il seno dell'angolo di inclinazione. Visto che $\sin(6°) \simeq 0.1$, la variazione di quota è di circa $500 \times 0.1 = 50$ m e la quota di arrivo è quindi di 2300 m circa.

Sol. Ex. 7.13.

Si applica il teorema dei seni, per cui servono $\sin(17°) \simeq 0.29$, $\sin(34°) \simeq 0.56$ e $\sin(129°) \simeq 0.78$. Allora la misura in metri di BC è $\frac{20}{\sin(17°)} \times \sin(34°) \simeq \frac{20}{0.29} \times 0.56$ cioè circa 38.6 m e la misura in metri di AC è $\frac{20}{\sin(17°)} \times \sin(129°) \simeq \frac{20}{0.29} \times 0.78$ cioè circa 53.8 m.

Sol. Ex. 7.14.

Si applica il teorema di Carnot, per cui serve $\cos(95°) \simeq -0.0872$. Allora la misura in centimetri di AC è $\sqrt{16 + 49 - 2 \times 4 \times 7 \times \cos(95°)} \simeq \sqrt{65 + 56 \times 0.0872}$ cioè circa 8.36 cm.