Lezione 4
Soluzioni Esercizi

Sol. Ex. 4.1. Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$6x - \frac{x}{6} = 11 \qquad \Leftrightarrow \qquad 36x - x = 66 \qquad \Leftrightarrow \qquad 35x = 66 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{66}{35}$$

Sol. Ex. 4.2. Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$3x - 3 - \frac{1}{7} = 4x - 7 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{27}{7}$$

Sol. Ex. 4.3. Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$5x + 4 + 36x - 2 = 28x + 14 \qquad \Leftrightarrow \qquad 13x = 12 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{12}{13}$$

Sol. Ex. 4.4. Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$5x - 6 + 3x + 6 = 3x - 21 \qquad \Leftrightarrow \qquad 5x = -21 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -\frac{21}{5}$$

Sol. Ex. 4.5. Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$140 + 5x - 60x = 16 - 30 - 25x \qquad \Leftrightarrow \qquad 30x = 154 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{77}{15}$$

Sol. Ex. 4.6. L'equazione è impossibile. Infatti, applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$50 + 6x - 9 - 6x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \cdot x = -40 \qquad : \text{ per nessun } x$$

Sol. Ex. 4.7. Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$5x + \sqrt{2}x - 2 = 4x + \sqrt{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad (1 + \sqrt{2})x = 2 + \sqrt{2} \qquad \Leftrightarrow$$
$$\left(1 + \sqrt{2}\right) x = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + 1\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt{2}$$

Sol. Ex. 4.8. Per $x \geq 0$ l'equazione si riscrive $\quad 2x = 1 \quad$ e ha soluzione $\quad x = \dfrac{1}{2}$.
Per $x < 0$ l'equazione diventa $\quad 0 = 1 \quad$ ed è impossibile.
In conclusione l'unica soluzione è $x = \dfrac{1}{2}$.

Sol. Ex. 4.9. Per $x \geq 0$ l'equazione si riscrive $\quad 2x + 1 = 3x - 6 \quad$ e ha soluzione $\quad x = 7$.
Per $x < 0$ abbiamo

$$-2x + 1 = 3x - 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad 5x = 7 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{7}{5},$$

soluzione non accettabile perché positiva.
In conclusione l'unica soluzione è $x = 7$.

Sol. Ex. 4.10. L'equazione si riscrive $\quad 4|x+1| = 1$, cioè $\quad x + 1 = \pm\, \dfrac{1}{4}$.
In conclusione ci sono due soluzioni (una maggiore, l'altra minore di -1):

$$x = -\frac{3}{4} \quad \text{e} \quad x = -\frac{5}{4}.$$

Sol. Ex. 4.11. Si può scrivere: $\dfrac{4-7x}{7x-4} = \dfrac{-\left(7x-4\right)}{7x-4}$: quest'espressione è definita per ogni $x \neq \dfrac{4}{7}$ e per tali valori è uguale a -1; soluzioni dell'equazione sono quindi tutti i numeri reali $x \neq \dfrac{4}{7}$.

Sol. Ex. 4.12. Si può scrivere: $\dfrac{2x-13}{13-2x} = \dfrac{2x-13}{-\left(2x-13\right)}$: quest'espressione è definita per ogni $x \neq \dfrac{13}{2}$ ma per tali valori è sempre uguale a -1 e non a 4: quindi nessun x è soluzione dell'equazione.

Sol. Ex. 4.13. Poiché $2 + |x| \geq 2 > 0$, la frazione $\dfrac{3+|x|}{2+|x|}$ è sempre definita. Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$5\left(3+|x|\right) = 6\left(2+|x|\right) \quad \Leftrightarrow \quad |x| = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \text{ oppure } x = 3$$

Sol. Ex. 4.14. Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$3x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Sol. Ex. 4.15. Si deve supporre $a+b \neq 0$. Sommando le due frazioni al primo membro si ha

$$\frac{2x+a+b}{a+b} = a+b.$$

Moltiplicando per il denominatore otteniamo

$$2x+a+b = (a+b)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = (a+b)(a+b-1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a+b}{2}(a+b-1).$$

Sol. Ex. 4.16. Si deve supporre $a \neq -2$. Semplificando le tre espressioni razionali fratte si ha

$$\frac{x+2a}{a+2} - \frac{x-4}{2a+4} = \frac{3x+3a}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4(x+2a)-2(x-4)-(a+2)\,(3x+3a)}{4\,(a+2)} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x(-4-3a)+8+2a-3a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (4+3a)\,x = 8+2a-3a^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (4+3a)\,x = (4+3a)\,(2-a)$$

In conclusione:
se $a = -\frac{4}{3}$ l'equazione è identicamente verificata, poiché è della forma $0 \cdot x = 0$;
se $a \neq -\frac{4}{3}$ (e $a \neq -2$) l'equazione ha una e una sola soluzione: $x = 2-a$.

Sol. Ex. 4.17. Le scomposizioni sono:

a) $(x-2)\cdot(x+3)$ **b)** $(x-2)\cdot(x-3)$

c) $(x-5)\cdot(x+7)$ **d)** $(x+1)\cdot(x+4)$

Sol. Ex. 4.18.

	radici	**scomposizione**
a)	non esistono	
b)	$1, \quad -\frac{7}{3}$	$3(x-1)\cdot\left(x+\frac{7}{3}\right) = (x-1)\cdot(3x+7)$
c)	$\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$	$\left(x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$
d)	$-\frac{3}{8}\,(1\pm\sqrt{65})$	$\frac{2}{3}\left(x+\frac{3}{8}(1+\sqrt{65})\right)\cdot\left(x+\frac{3}{8}(1-\sqrt{65})\right)$

Sol. Ex. 4.19. Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$x^2 + 5(5-4x) = -10x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 10x + 25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-5)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$$

Sol. Ex. 4.20. Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$40x^2 - 40x + 10 = 2x^2 + 15x - 1 + 5x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 33x^2 - 55x + 11 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Sol. Ex. 4.21. Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni e utilizzando la proprietà che lega i coefficienti di un polinomio di secondo grado alla somma e prodotto delle sue radici, otteniamo:

$$6x + 9 = 2x^2 - 6\sqrt{2}x + 9 + 18\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \left(3\sqrt{2}+3\right)x + 9\sqrt{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \text{ oppure } x = 3\sqrt{2}$$

Sol. Ex. 4.22. Deve essere $x \neq 0$.

$$\frac{96 - 54 - 7x}{12x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 42 - 7x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6.$$

Sol. Ex. 4.23. Deve essere $x \neq 1$. Ma per tali valori di x si ha $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1 \neq 0$. Quindi l'equazione è impossibile.

Sol. Ex. 4.24. Deve essere $x \neq 3$.

$$\frac{5 - x^2 + x(x-3)}{x-3} = \quad \Leftrightarrow \quad 5 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{3}$$

Sol. Ex. 4.25. Deve essere $x \neq \pm 1$.

$$\frac{1 - (x-1) - (x+1)}{x^2 - 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Sol. Ex. 4.26. Deve essere $x \neq 0$ e $x \neq -\frac{3}{2}$.

$$\frac{2x^2 - 7x + (2x+3)(1+4x) - 8x^2}{x(2x+3)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 7x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \text{ oppure } x = -\frac{1}{2}$$

Sol. Ex. 4.27. Deve essere $x \neq \pm 1$.

$$\frac{x(x+1)+(x-1)-2(x^2-1)}{x^2-1}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1\pm\sqrt{2}.$$

Sol. Ex. 4.28. Deve essere $x \neq 1$ e $x \neq 2$. L'equazione $\dfrac{x-1+|x|\,(x-2)}{(x-2)(x-1)}=0$ è verificata solo se $x-1+|x|\,(x-2)=0$, cioè

$$\begin{array}{cc} & x-1+x(x-2)=0 \quad \text{e} \quad x\geq 0 \\ \text{oppure} & \\ & x-1-x(x-2)=0 \quad \text{e} \quad x<0 \end{array}$$

cioè sviluppando

$$\begin{array}{cc} & x^2-x-1=0 \quad \text{e} \quad x\geq 0 \\ \text{oppure} & \\ & x^2-3x+1=0 \quad \text{e} \quad x<0 \end{array}$$

La prima equazione ha una sola soluzione ≥ 0: $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, la seconda equazione non ha soluzioni < 0.
In conclusione l'unica soluzione dell'equazione di partenza è $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Sol. Ex. 4.29. Deve essere $x \neq a$ e $x \neq -2a$.

$$\frac{(x-1)(x+2a)+(x+1)(x-a)-2(x-a)(x+2a)}{(x-a)(x+2a)}=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad ax=a(4a-3).$$

Se $a=0$, l'equazione è identicamente verificata. Se $a\neq 0$, otteniamo $x=4a-3$; poiché x deve essere diverso sia da a che da $-2a$, i casi $a=1$ e $a=1/2$ danno luogo ad una equazione impossibile.
In conclusione:

se $a=0$	ogni numero reale è soluzione
se $a=1$ oppure $a=1/2$	non ci sono soluzioni
se $a\neq 0$ e $a\neq 1$ e $a\neq 1/2$	c'è una e una sola soluzione: $x=4a-3$.

Sol. Ex. 4.30. Deve essere $x\neq \pm 2$. È chiaro che $x=0$ è una soluzione dell'equazione. Se $x>0$, otteniamo l'equazione

$$\frac{x}{x^2-4}=\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x-2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x-2x^2}{x^2-4}=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x\,(2x-1)=0$$

che, essendo $x>0$, ha la sola soluzione $x=\dfrac{1}{2}$.
Per $x<0$, otteniamo l'equazione

$$\frac{x}{x^2-4}=\frac{x}{x+2}-\frac{x}{x-2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x+4x}{x^2-4}=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 5x=0$$

che, essendo $x<0$, non ha soluzioni.

In conclusione le soluzioni dell'equazione di partenza sono $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.

Sol. Ex. 4.31. Elevando al quadrato otteniamo l'equazione $x - 1 = 4$, da cui $x = 5$; si verifica immediatamente che $x = 5$ è anche soluzione dell'equazione originaria.

Sol. Ex. 4.32. Elevando al cubo abbiamo

$$2x + 7 = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x = -8 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -4.$$

Si verifica immediatamente che $x = -4$ è soluzione dell'equazione di partenza.

Sol. Ex. 4.33. L'equazione è impossibile: il primo membro, come somma di due quantità non negative e non simultaneamente nulle, è sempre positivo.

Sol. Ex. 4.34. L'equazione è impossibile: se tutte le radici sono definite (il che succede per $x > 0$) si ha $\sqrt{x+5} > \sqrt{x+4}$ poiché $5 > 4$: a maggior ragione non può essere $\sqrt{x+4} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x+5}$ visto che $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è sempre positivo.

Sol. Ex. 4.35. La radice $\sqrt{2x^2+9}$ è sempre definita e $\geq \sqrt{9} > 0$: quindi può valere l'uguaglianza $2x-3 = \sqrt{2x^2+9}$ solo se $2x-3 > 0$. Elevando al quadrato entrambi i membri si ottiene l'uguaglianza $2x^2 - 12x = 0$, che è vera per $x = 0$ e $x = 6$: il primo valore non soddisfa la condizione $2x - 3 > 0$ e quindi l'unica soluzione dell'equazione data è $x = 6$.

Sol. Ex. 4.36. La radice $\sqrt{x-2}$ è definita per $x \geq 2$; il denominatore è sempre diverso da 0, anzi, per la condizione su x è $|x| = x \geq 2$ e $|x| + 1 = x + 1 \geq 3$. Ma il rapporto non può valere 1 per alcun valore reale di x : altrimenti elevando al quadrato si avrebbe $\frac{x-2}{(x+1)^2} = 1$, che è impossibile (provare a risolvere questa equazione fratta!). Quindi l'equazione è impossibile.

Sol. Ex. 4.37. Si devono trovare i valori di x che sono soluzioni tanto dell'equazione $x^2 - 1 = 0$ che dell'equazione $3x^2 + 4x + 1 = 0$. La prima ha soluzioni $x = 1$ e $x = -1$: $x = 1$ non può essere soluzione di $3x^2 + 4x + 1 = 0$, poiché $3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 = 8 \neq 0$ mentre $x = -1$ ne è soluzione, poiché $3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 1 = 0$: quindi il sistema di equazioni ha soluzione $x = -1$.
Nota bene: avremmo potuto anche cercare direttamente le soluzioni della seconda equazione e confrontarle con quelle della prima, ma sarebbe stato inutilmente pesante.

Sol. Ex. 4.38. Si devono trovare i valori di x che sono soluzioni tanto dell'equazione $6x + 9 = \left(x\sqrt{2} - 3\right)^2 + 18\sqrt{2}$ che dell'equazione $\dfrac{3 + |x|}{2 + |x|} = \dfrac{6}{5}$. Anche senza risolvere la prima equazione, osserviamo che la seconda ha soluzioni $x = 3$ e $x = -3$ (vedi esercizio 4.13): $x = -3$ non può essere soluzione di $6x + 9 = \left(x\sqrt{2} - 3\right)^2 + 18\sqrt{2}$, poiché $6\,(-3) + 9 < 0 < \left(-3\sqrt{2} - 3\right)^2 + 18\sqrt{2}$ e quindi i due membri non sono uguali, mentre $x = 3$ ne è soluzione poiché $\left(3\sqrt{2} - 3\right)^2 + 18\sqrt{2} = 9\left(3 - 2\sqrt{2}\right) + 18\sqrt{2} = 27 = 6 \cdot 3 + 9$: quindi il sistema di equazioni ha soluzione $x = 3$.

Sol. Ex. 4.39. Devono essere eliminati gli eventuali valori di x che annullano almeno uno dei denominatori, cioè gli x che sono soluzione di almeno una delle due equazioni seguenti

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad\qquad x^2 - 2x + 1 = 0.$$

La prima equazione ha come soluzioni $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, mentre la seconda ha come unica soluzione $x = 1$.
In conclusione, l'espressione ha significato per tutti i numeri reali tranne $x = 1$ e $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Sol. Ex. 4.40. Deve essere $x \neq \pm 1$. Inoltre deve essere non nullo il denominatore della intera frazione, quindi dobbiamo eliminare le eventuali soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} = 0$$

che equivale alla

$$\frac{1}{x^2 - 1} + \frac{2}{x^2 - 1} = 0,$$

che è impossibile.
In conclusione l'espressione di partenza ha significato per $x \neq \pm 1$.

Sol. Ex. 4.41. Deve essere $x \neq \pm 1$. Inoltre deve essere non nullo il denominatore della intera frazione, quindi dobbiamo eliminare le soluzioni dell'equazione

$$\frac{3}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x - 1} = 0$$

che equivale alla

$$\frac{3 + (x - 1) - 2\,(x + 1)}{x^2 - 1} = 0$$

che ha soluzione $x = 0$: dunque l'espressione ha significato per tutti gli x diversi da -1, 0, 1.

Sol. Ex. 4.42. Deve essere $x \neq \pm 1$. Inoltre, poiché per ogni x (diverso da -1 e 1) risulta

$$\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} = \frac{-2}{x^2 - 1},$$

cioè il denominatore si annulla, l'espressione data non ha significato per alcun valore di x.