

# Lezione 6

## Richiami di Geometria Analitica

### 1. Piano cartesiano

Consideriamo nel piano due rette **perpendicolari** che si intersecano in un punto  $O$ . Consideriamo ciascuna di queste rette come retta orientata con origine  $O$ .

Abbiamo così introdotto un **sistema di riferimento ortogonale** nel piano; ciascuna delle due rette verrà detta **asse** del sistema di riferimento. Usualmente nel disegno una retta è orizzontale e indicata con la lettera  $x$ , l'altra, verticale, è indicata con la lettera  $y$ . Inoltre se la retta  $x$  è orientata da sinistra a destra, la  $y$  è orientata dal basso verso l'alto. Infine, spesso si sceglie la stessa unità di misura sulle due rette.

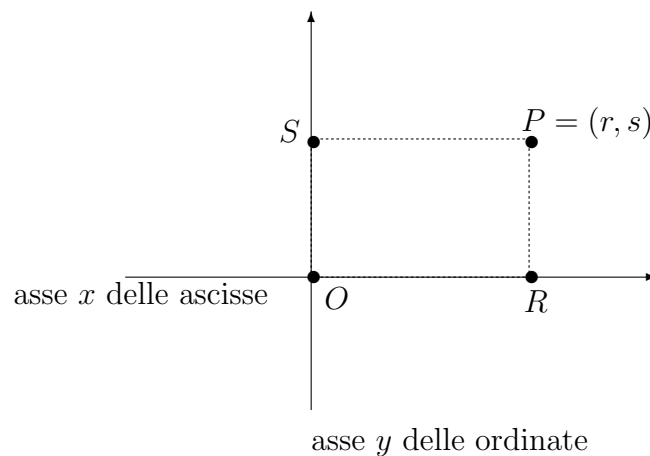
Consideriamo ora un punto  $P$  nel piano: le parallele agli assi passanti per  $P$  intersecano l'asse orizzontale nel punto  $R$  e l'asse verticale nel punto  $S$ . I numeri reali  $r$  ed  $s$  associati (sulle due rette orientate) ai punti  $R$  ed  $S$  sono dette rispettivamente **ascissa** e **ordinata** del punto  $P$ .

Quindi ad ogni punto del piano è associata una coppia ordinata  $(r, s)$  di numeri reali, che sono dette **coordinate cartesiane** del punto  $P$ .

Viceversa ad ogni coppia ordinata di numeri reali, facendo la costruzione inversa della precedente, si associa un punto nel piano.

In tale modo i punti del piano sono identificati con le coppie ordinate di numeri reali:

$$P = (r, s).$$

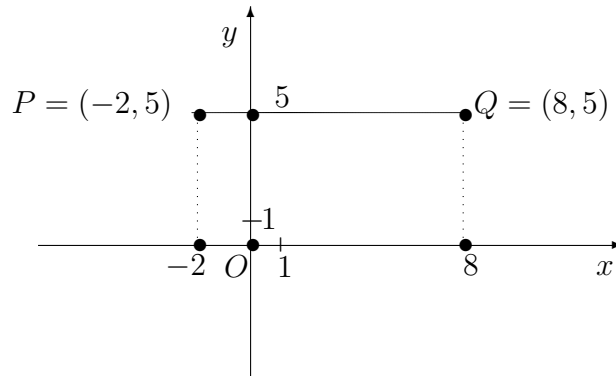


### 2. Distanza di due punti

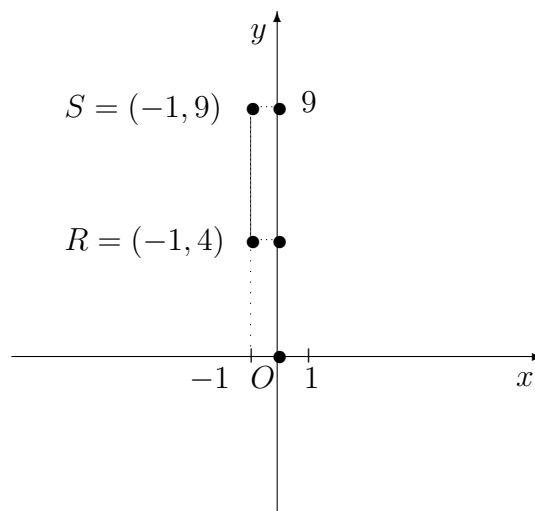
Vogliamo determinare la distanza tra due punti  $P$  e  $Q$  del piano. Se i punti hanno uguale ordinata la distanza (come visto nella Lezione 1) si determina calcolando il modulo della differenza delle ascisse di  $P$  e  $Q$ . Analogamente si procede se  $P$  e  $Q$  hanno la stessa ascissa.

**Esempio 6.1** Determiniamo la distanza

- tra  $P = (-2, 5)$  e  $Q = (8, 5)$ :  $\text{dist}(P, Q) = |-2 - 8| = |-10| = 10$ .
- tra  $R = (-1, 4)$  e  $S = (-1, 9)$ :  $\text{dist}(R, S) = |4 - 9| = 5$ .



Distanza tra i punti  $P = (-2, 5)$  e  $Q = (8, 5)$ .



Distanza tra i punti  $R = (-1, 4)$  e  $S = (-1, 9)$ .

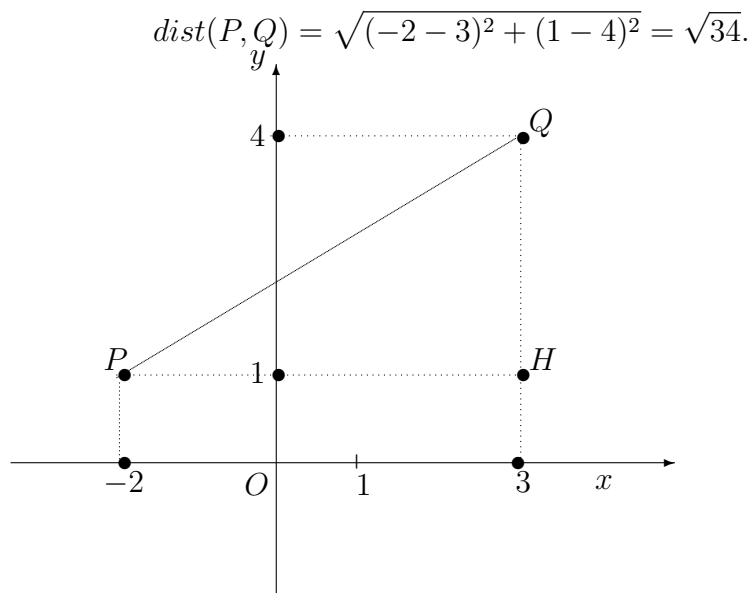
In generale la distanza si ricava utilizzando il:

**Teorema di Pitagora** *Dato un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.*

Quindi se  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$

$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

**Esempio 6.2** Determiniamo la distanza tra  $P = (-2, 1)$  e  $Q = (3, 4)$ :



Distanza tra i punti  $P = (-2, 1)$  e  $Q = (3, 4)$ .

### 3. Equazione della retta

Ogni equazione di I grado in due incognite  $x$  e  $y$

$$(*) \quad \mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c} = 0 \quad \text{con } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b} \text{ non entrambe } = 0$$

è l'equazione di una retta nel piano.

Ciò significa che:

- tutti i punti  $P = (r, s)$  tali che  $\mathbf{a}r + \mathbf{b}s + \mathbf{c} = 0$  appartengono ad una stessa retta

e viceversa

- tutti i punti che appartengono ad una stessa retta hanno coordinate che sono soluzione di una stessa equazione di tipo  $(*)$ .

Ad esempio, sono equazioni di rette:  $2x - y + 1 = 0$ ;  $3x - 2 = 0$ ;  $y = 6x$ .

Per disegnare una retta osserviamo che:

- se  $\mathbf{a} = 0$  e  $\mathbf{b} \neq 0$ , e quindi la  $(*)$  diventa  $y = -\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}$ , la retta è parallela all'asse delle ascisse e passa per  $\left(0, -\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}\right)$ ;
- se  $\mathbf{a} \neq 0$  e  $\mathbf{b} = 0$ , e quindi la  $(*)$  diventa  $x = -\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}$ , la retta è parallela all'asse delle ordinate e passa per  $\left(-\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}, 0\right)$ ;

- se  $\mathbf{a} \neq 0$  e  $\mathbf{b} \neq 0$  e  $\mathbf{c} = 0$  la retta passa per l'origine  $O = (0, 0)$ . Inoltre, ad esempio, se  $x = 1$  allora  $y = -\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ , e quindi la retta passa anche per  $\left(1, -\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)$ ;
- Se  $\mathbf{a} \neq 0$ ,  $\mathbf{b} \neq 0$  e  $\mathbf{c} \neq 0$  la retta interseca gli assi rispettivamente nei punti  $P = \left(-\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}, 0\right)$  e  $Q = \left(0, -\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}\right)$ .

**Esempio 6.3** Tracciamo le rette di equazione

$$i) 5x + 10 = 0, \quad ii) 9y - 3 = 0, \quad iii) 2x - 3y = 0, \quad iv) x + y - 2 = 0.$$

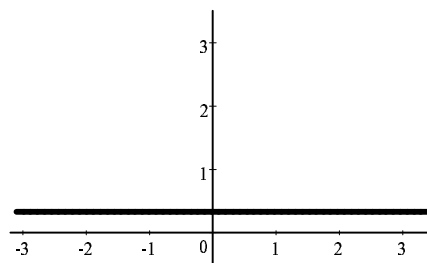
Le rette  $i)$  e  $ii)$  sono parallele agli assi.

Per tracciare la retta  $iii)$  osserviamo che passa per l'origine e per il punto  $(1, 2/3)$ .

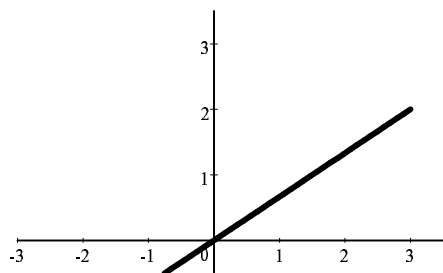
Per tracciare la retta  $iv)$  osserviamo che passa per  $(2, 0)$  e per  $(0, 2)$ .



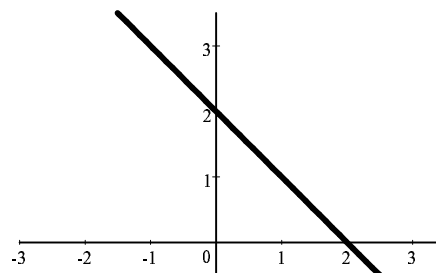
$i) \quad 5x + 10 = 0$



$ii) \quad 9y - 3 = 0$



$iii) \quad 2x - 3y = 0$



$iv) \quad x + y - 2 = 0$

**Esempio 6.4** Scriviamo l'equazione della retta<sup>(1)</sup> che passa per

<sup>1)</sup> È chiaro che le equazioni  $x + y - 2 = 0$ ,  $x + y = 2$ ,  $3x + 3y - 6 = 0$ , ... sono tra loro equivalenti: quindi rappresentano la stessa retta. Di fatto, per ogni retta ci sono infinite equazioni che la rappresentano; non si dovrebbe dire *l'equazione della retta passante per*  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  è  $x + y - 2 = 0$  bensì *un'equazione della retta passante per*  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  è  $x + y - 2 = 0$ . Di solito però ci si dimentica di questa "finezza grammaticale" e si dice l'equazione della retta intendendo l'equazione che, note alcune informazioni sulla retta, è più comodo calcolare.

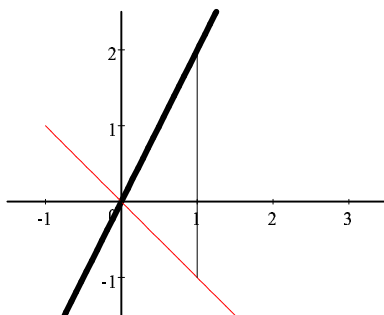
- $A = (3, -1)$  e  $B = (7, -1)$ : poiché i due punti hanno la stessa ordinata, la retta ha equazione:  $y = -1$ .
- $A = (1, 0)$  e  $B = (0, 5)$ :  $A$  e  $B$  sono i punti intersezione della retta con gli assi cartesiani, cioè i punti  $P = \left(-\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}, 0\right)$  e  $Q = \left(0, -\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}\right)$  visti sopra. Quindi  $-\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} = 1$  e  $-\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}} = 5 \Leftrightarrow -\mathbf{c} = \mathbf{a}$  e  $-\mathbf{c} = 5\mathbf{b}$ , da cui, ponendo  $\mathbf{c} = -1$ , otteniamo che la retta ha equazione:  $x + \frac{y}{5} - 1 = 0$
- $A = (5, -2)$  e  $B = (5, 1)$ : poiché i due punti hanno la stessa ascissa, la retta ha equazione:  $x = 5$ .

Se  $\mathbf{b} \neq 0$ , cioè se la retta non è parallela all'asse  $y$ , può essere comodo scrivere l'equazione (\*) nella forma

$$(**) \quad y = \mathbf{m}x + \mathbf{q} \quad \text{con} \quad \mathbf{m}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}$$

ove  $\mathbf{m}$  è detto **coefficiente angolare** della retta e  $\mathbf{q}$  è detta ordinata all'origine. L'interpretazione geometrica di  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{q}$  è la seguente

- $\mathbf{q}$  rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta di equazione (\*\*) con l'asse  $y$ ;
- $\mathbf{m}$  è una misura della pendenza della retta. Questo fatto si vede molto bene con le rette passanti per l'origine, cioè quelle della forma  $y = \mathbf{m}x$ . Infatti il punto della retta di ascissa 1 ha ordinata  $\mathbf{m}$ : quindi, a parità di ascissa, più  $|\mathbf{m}|$  è grande, maggiore è l'inclinazione della retta rispetto all'asse  $x$ .



$$y = 2x \text{ (spesso); } y = -x \text{ (sottile)}$$

Se  $\mathbf{m} = 0$  la retta è parallela all'asse  $x$ . Inoltre all'aumentare dei valori delle ascisse dei punti della retta:

- se  $\mathbf{m} > 0$  aumentano anche i valori delle ordinate (la retta “cresce”);
- se  $\mathbf{m} < 0$  i valori delle ordinate diminuiscono (la retta “decresce”) <sup>(2)</sup>

Ricordiamo che le rette parallele all'asse  $y$  NON possono essere scritte nella forma (\*\*).

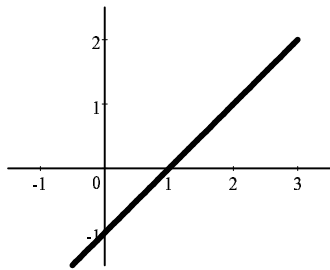
<sup>2)</sup> In particolare se  $\mathbf{m} > 0$  e  $x$  cresce di 1 allora  $y$  cresce di  $\mathbf{m}$ , mentre se  $\mathbf{m} < 0$  e  $x$  cresce di 1 allora  $y$  decresce di  $|\mathbf{m}| = -\mathbf{m}$ .

**Esempio 6.5** Tracciamo le rette di equazione

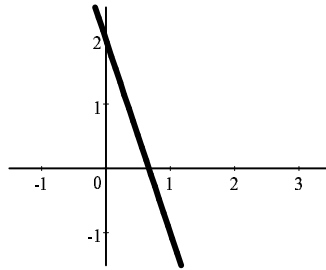
$$i) y = x - 1,$$

$$ii) y = -3x + 2,$$

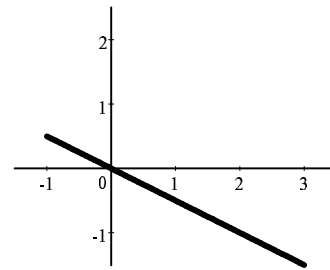
$$iii) y = -x/2.$$



$$i) \quad y = x - 1$$



$$ii) \quad y = -3x + 2$$



$$iii) \quad y = -x/2$$

**Esempio 6.6**

- Determiniamo l'equazione della retta che passa per  $A = (1, -1)$  e  $B = (2, 2)$ . Le coordinate dei due punti verificano l'equazione  $(**)$  quindi  $-1 = \mathbf{m} + \mathbf{q}$  e  $2 = 2\mathbf{m} + \mathbf{q}$ , da cui  $\mathbf{m} = 3$  e  $\mathbf{q} = -4$ . L'equazione della retta è  $y = 3x - 4$ .
- Determiniamo le intersezioni con gli assi cartesiani della retta di equazione  $y = 2x - 3$ . Se poniamo  $x = 0$  nell'equazione della retta troviamo che l'intersezione con l'asse  $y$  è  $Q = (0, -3)$ ; se poniamo  $y = 0$  troviamo che l'intersezione con l'asse  $x$  è  $P = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ .

In generale, per determinare l'eventuale intersezione di due rette dobbiamo cercare le soluzioni comuni alle loro equazioni, ossia risolvere il sistema delle loro equazioni.

**Esempio 6.7** Determiniamo l'intersezione, se esiste, tra le rette aventi rispettivamente equazione  $y = -x + 2$  e  $y = 4x - 3$ . Deve essere:  $-x + 2 = 4x - 3$ , da cui  $x = 1$ . Calcolando il valore dell'ordinata in una delle due equazioni della retta otteniamo  $y = 1$ ; le due rette si intersecano in  $(1, 1)$ .

Possiamo rileggere geometricamente ciascuno degli esempi 4.20 della Lezione 4.

Abbiamo visto che il sistema  $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$  ha soluzione  $x = 6/5$  e  $y = -2/5$ : ciò significa che le due rette di equazione  $2x + y = 2$  e  $x + 3y = 0$  hanno intersezione nel punto di coordinate  $(6/5, -2/5)$ .

Invece il sistema  $\begin{cases} y = 5x - 7 \\ 10x - 2y = 0 \end{cases}$  è impossibile: ciò significa che le due rette di equazione  $y = 5x - 7$  e  $10x - 2y = 0$  non hanno alcun punto di intersezione (e nel piano questo succede solo se sono parallele).

Infine il sistema  $\begin{cases} y = 5x - 7 \\ 10x - 2y - 14 = 0 \end{cases}$  è indeterminato: ciò significa che le equazioni  $y = 5x - 7$  e  $10x - 2y - 14 = 0$  rappresentano la stessa retta (si usa dire che le due rette coincidono).

Due rette non parallele agli assi sono:

- **parallele** se (e solo se) hanno lo stesso coefficiente angolare  $\mathbf{m}$ ;
- **perpendicolari** se il prodotto dei loro coefficienti angolari vale  $-1$ .

**Esempio 6.8** Scriviamo l'equazione della retta che:

- Passa per  $A = (1, 2)$  ed è parallela alla retta di equazione  $y = 3x + 1$ : la retta è del tipo  $y = 3x + \mathbf{q}$ , poiché ha lo stesso coefficiente angolare di quella data; inoltre passando da  $A$  risulta  $2 = 3 + \mathbf{q}$ , quindi  $\mathbf{q} = -1$ . La retta ha perciò equazione  $y = 3x - 1$ .  
È più veloce osservare che per passare dal punto  $A$  la retta deve avere la forma  $y - 2 = \mathbf{m}(x - 1)$ , e per essere parallela alla retta data deve essere  $\mathbf{m} = 3$ .
- Passa per l'origine  $O$  ed è perpendicolare alla retta di equazione  $y = -x/2$ : poiché la retta è perpendicolare a quella data, che ha coefficiente angolare  $-1/2$ , il suo coefficiente angolare è  $2$ ; inoltre passa per l'origine, quindi  $\mathbf{q} = 0$ . La retta ha equazione  $y = 2x$ .

## 4. Equazione della circonferenza

L'insieme dei punti del piano equidistanti da un punto fissato si chiama **circonferenza**. La circonferenza di centro  $C = (\alpha, \beta)$  e raggio  $r$  è costituita dall'insieme dei punti  $P = (x, y)$  tali che:

$$\text{dist}(P, C) = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = r.$$

Elevando al quadrato otteniamo l'equazione della circonferenza:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Sviluppando, la si può scrivere nella forma:

$$(\star) \quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad \text{con} \quad a = -2\alpha, \quad b = -2\beta, \quad c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2.$$

**Esempio 6.9** L'equazione della circonferenza con centro  $C = (-1, 2)$  e raggio  $5$  è :

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25,$$

ossia  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ .

**Esempio 6.10** Data la circonferenza di equazione  $2x^2 + 2y^2 - 2x + 10y - 5 = 0$  vogliamo determinare il suo centro e il suo raggio:

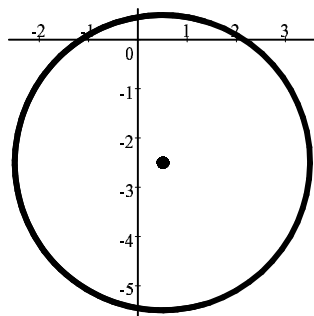
$$2x^2 + 2y^2 - 2x + 10y - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - x + 5y - \frac{5}{2} = 0$$

riscriviamo l'equazione come il completamento di un quadrato sia per la variabile  $x$  che per la  $y$ :

$$\begin{aligned} (x^2 - x) + (y^2 + 5y) - \frac{5}{2} = 0 &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - \frac{5}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 9 \end{aligned}$$

quindi  $C = (1/2, -5/2)$  e  $r = 3$ .

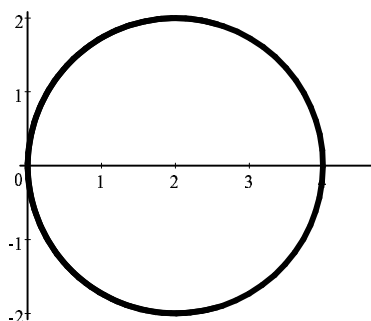
Lo stesso risultato si può anche ottenere utilizzando le formule  $(\star)$ .



Non è sempre detto che, data un'equazione di 2° grado, in cui i coefficienti di  $x^2$  e  $y^2$  sono uguali, questa rappresenti una circonferenza. Ad esempio

- l'equazione  $x^2 + y^2 + 4 = 0$  è impossibile, NON rappresenta alcun punto del piano;
- l'equazione  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$  è verificata per  $x = 1$  e  $y = 2$ , quindi solo il punto  $(1, 2)$  è soluzione. NON rappresenta una circonferenza.
- l'equazione  $x^2 - 2xy + y^2 = 0$  cioè  $(x - y)^2 = 0$  rappresenta la retta di equazione  $y = x$ , e quindi NON rappresenta una circonferenza.
- l'equazione  $x^2 + y^2 - 2xy - x + y = 0$  cioè  $(x - y)(x - y - 1) = 0$  rappresenta le due rette di equazioni  $y = x$  e  $y = x - 1$ , e quindi NON rappresenta una circonferenza.

**Esempio 6.11** Vogliamo scrivere l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento di estremi  $O = (0, 0)$  e  $P = (4, 0)$ : osserviamo che la circonferenza ha centro in  $(2, 0)$  e raggio 2, quindi l'equazione della circonferenza è  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ .



## 5. Equazione dell'ellisse

L'insieme dei punti  $P = (x, y)$  del piano le cui coordinate verificano l'equazione

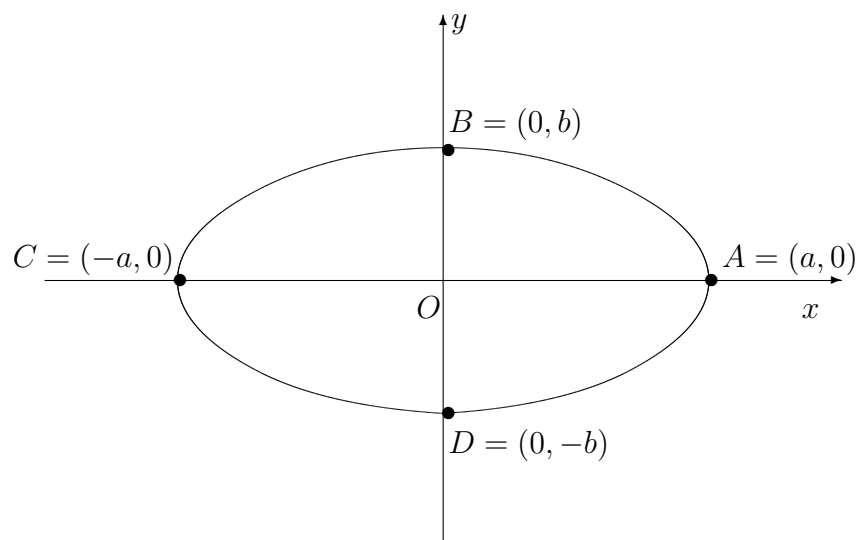
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a > 0 \text{ e } b > 0$$

è un'ellisse con centro nell'origine e assi di simmetria gli assi cartesiani.

I punti  $A = (a, 0)$  e  $C = (-a, 0)$  sono le intersezioni dell'ellisse con l'asse  $x$ . I punti  $B = (0, b)$  e  $D = (0, -b)$  sono le intersezioni dell'ellisse con l'asse  $y$ .

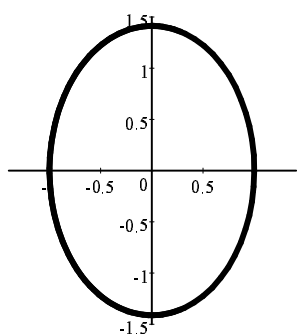
Quindi  $a$  e  $b$  rappresentano la lunghezza dei semiassi dell'ellisse. Ovviamente se  $a = b$ , cioè se i semiassi sono uguali, l'ellisse è una circonferenza di raggio  $a$ .



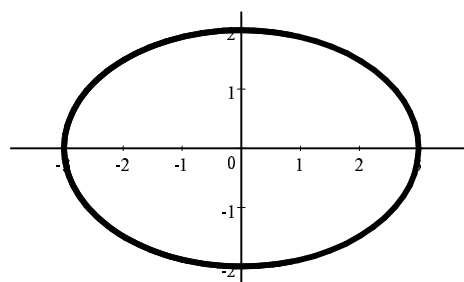


**Esempio 6.12** Disegniamo le ellissi di equazione

$$i) \quad x^2 + \frac{y^2}{2} = 1, \quad ii) \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$



$$i) \quad x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$



$$ii) \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

## 6. Equazione dell'iperbole

L'insieme dei punti  $P = (x, y)$  del piano le cui coordinate verificano l'equazione

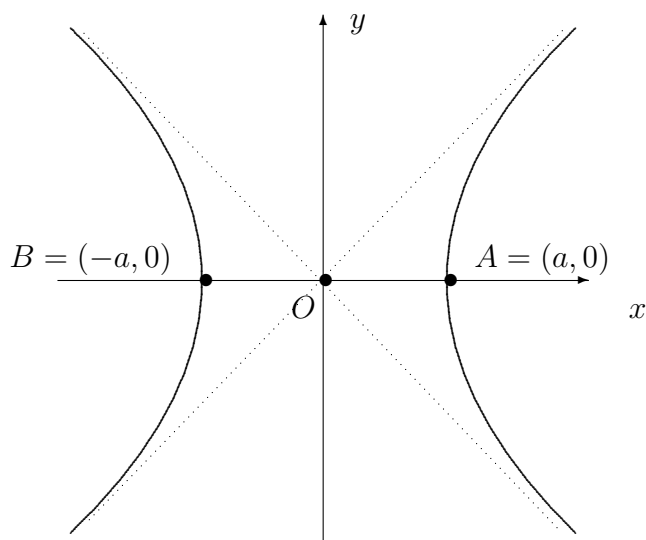
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a > 0 \text{ e } b > 0$$

è un'**iperbole** che ha gli assi cartesiani come assi di simmetria e interseca l'asse  $x$  nei punti di ascissa  $a$  e  $-a$ . I suoi asintoti (rette che non l'intersecano mai, ma le sono sempre più vicine quando  $|x|$  diventa grande) sono  $y = \pm \frac{b}{a}x$ .

Se  $a = b$  l'iperbole è detta equilatera e con una rotazione della figura nel piano la si può trasformare nella forma

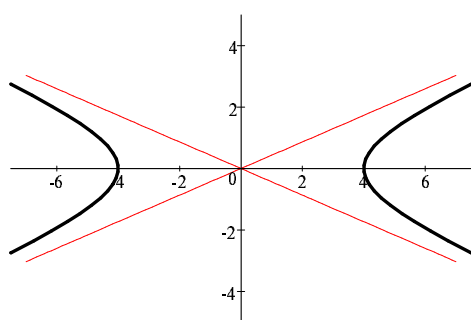
$$xy = k \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \text{ e } k \neq 0$$

che è quella più usata e di solito si scrive nella forma  $y = \frac{k}{x}$ : essa ha gli assi cartesiani come asintoti.

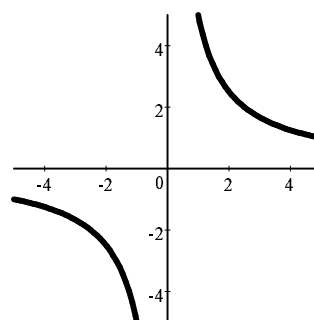


**Esempio 6.13** Disegniamo le iperboli di equazione

$$i) \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{3} = 1, \quad ii) \quad y = \frac{5}{x}$$



$$i) \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{3} = 1,$$



$$ii) \quad y = \frac{5}{x}$$

## 7. Equazione della parabola

Consideriamo ora la più nota delle coniche: la parabola.

L'insieme dei punti  $P = (x, y)$  del piano le cui coordinate verificano l'equazione

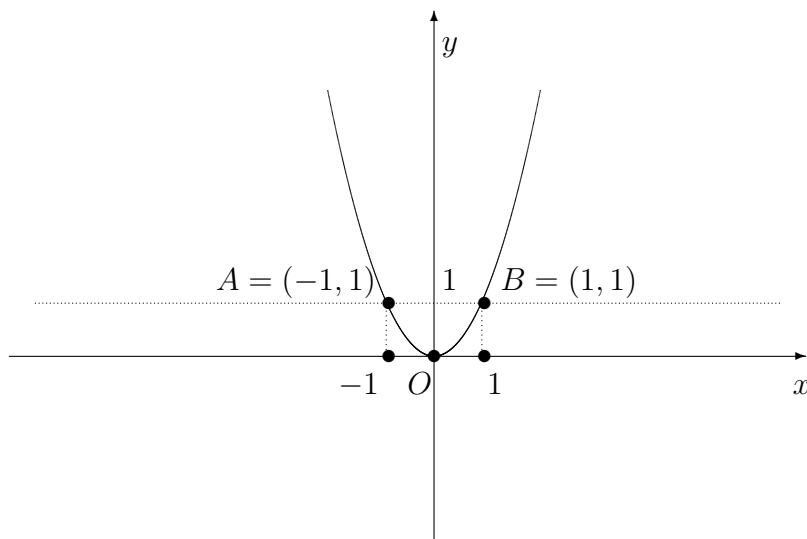
♣	$y = ax^2 + bx + c$	con $a \neq 0$
---	---------------------	----------------

si chiama **parabola** con asse parallelo all'asse  $y$ .

L'**asse** è la retta di equazione  $x = -\frac{b}{2a}$  che interseca la parabola in un unico punto  $V$ , detto **vertice**,

di coordinate  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ .

**Esempio 6.14** Determiniamo il vertice e l'asse della parabola di equazione  $y = x^2$ : l'equazione dell'asse è  $x = 0$  e  $V = (0, 0)$ . Il grafico è il seguente:



Consideriamo ora la retta, parallela all'asse  $x$ , di equazione  $y = 1$ : essa interseca la parabola nei punti  $A = (-1, 1)$  e  $B = (1, 1)$  e l'asse in  $C = (0, 1)$ . Osserviamo che  $C$  è il punto medio del segmento  $AB$ . Lo stesso risultato si ottiene intersecando la parabola con qualsiasi retta orizzontale di equazione  $y = y_0$  con  $y_0 > 0$ : *dunque la parabola è simmetrica rispetto al suo asse*. Questo risultato è vero per ogni parabola.

**Esempio 6.15** Determiniamo il vertice e l'asse della parabola di equazione  $y = -3x^2 - 6x$ : l'equazione dell'asse è  $x = -\frac{6}{6} = -1$  e  $V = (-1, 3)$ . Osserviamo che l'ordinata del vertice si ricava, senza utilizzare la formula generale, semplicemente sostituendo il valore dell'ascissa  $x = -1$  nell'espressione  $y = -3x^2 - 6x$ .

Vogliamo vedere come è posizionata nel piano una parabola di equazione  $\clubsuit$ .

Osserviamo che trovare le ascisse delle eventuali intersezioni della parabola con l'asse delle  $x$  (che ha equazione  $y = 0$ ) equivale a risolvere l'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Quindi:

- se  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  la parabola interseca l'asse delle  $x$  in due punti distinti di ascisse  $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ;
- se  $\Delta = 0$  la parabola interseca l'asse delle  $x$  in due punti coincidenti di ascissa  $-\frac{b}{2a}$ ;
- se  $\Delta < 0$  la parabola non interseca l'asse delle  $x$ .

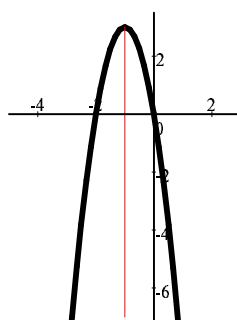
Osserviamo che:

- se  $a > 0$  la parabola è rivolta verso l'alto (è convessa);
- se  $a < 0$  la parabola è rivolta verso il basso (è concava).
- se  $|a| > 1$  la parabola è poco aperta;
- se  $|a| < 1$  la parabola è molto aperta;

Osserviamo inoltre che:

- se  $a > 0$  le ordinate di tutti i punti che appartengono alla parabola sono  $\geq$  dell'ordinata del vertice;
- se  $a < 0$  le ordinate di tutti i punti che appartengono alla parabola sono  $\leq$  dell'ordinata del vertice.

**Esempio 6.16** Riprendiamo l'esempio 6.15. La parabola di equazione  $y = -3x^2 - 6x$  ha asse  $x = -1$  e vertice  $V = (-1, 3)$ ; interseca l'asse delle  $x$  in due punti  $A = (-2, 0)$ ,  $B = (0, 0)$  ed è concava. Dunque la parabola ha questo grafico:

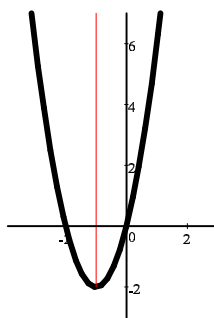


$$y = -3x^2 - 6x$$

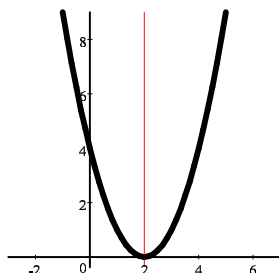
**Esempio 6.17** Tracciamo le parabole di equazione:

$$i) y = 2x^2 + 4x, \quad ii) y = x^2 - 4x + 4, \quad iii) y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3,$$

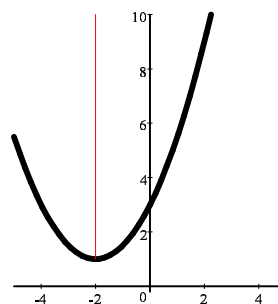
$$iv) y = 1 - 3x^2, \quad v) y = -x^2 + 6x - 9, \quad vi) y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 2.$$



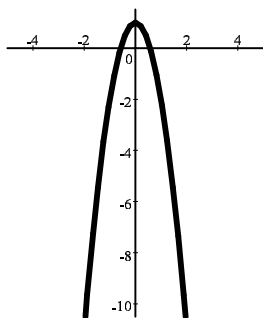
$$y = 2x^2 + 4x$$



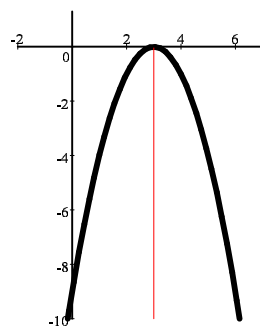
$$y = x^2 - 4x + 4$$



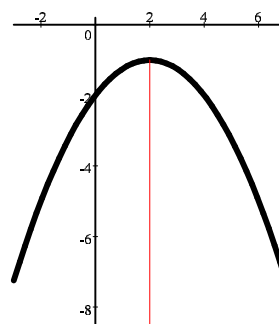
$$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$$



$$y = 1 - 3x^2$$



$$y = -x^2 + 6x - 9$$



$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 2$$