



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
**FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,
FISICHE E NATURALI**

CORSO DI LAUREA IN FISICA

**Livelli di Landau ed effetti del disordine
nell'effetto Hall quantistico intero**

Relatore: Prof. Luca G. MOLINARI

TESI DI LAUREA DI:
Andrea PAPAŁE
Matr. 760675
Codice P.A.C.S.: 05.30.-d

ANNO ACCADEMICO 2011-2012

Indice

1	Effetto Hall	3
1.1	Effetto Hall classico	3
1.2	Effetto Hall quantistico intero	4
1.3	Effetto Hall quantistico frazionario	5
1.4	Effetto Hall quantistico relativistico	5
2	Livelli di Landau	6
2.1	Moto classico di un elettrone in campo magnetico	6
2.2	Moto elettrone in campo elettrico	7
2.3	Meccanica quantistica	7
2.3.1	Invarianza di Gauge	8
2.3.2	Livelli di Landau	9
2.3.3	Degenerazione dei livelli di Landau	10
2.3.4	Autostati	11
2.3.5	Fase di Aharonov-Bohm	13
2.4	Elettrone in campo elettrico	13
2.5	Effetti di Bordo	15
2.5.1	Risultato esatto	15
2.5.2	Simulazione numerica	18
3	Effetto Hall quantistico intero	25
3.1	Localizzazione di Anderson	25
3.2	Teoria di Laughlin	26
4	Variabili di Grassmann	30
4.1	Algebra	30
4.2	Algebra di Grassmann	31
4.3	Funzioni	31
4.3.1	Campo complesso	32
4.4	Superanalisi	32
4.4.1	Derivata	33
4.4.2	Integrale	34
4.5	Parisi-Sourlas	35
5	Disordine	39
5.1	Funzione di Green	40
5.2	Denominatore	40
5.3	Approccio fermionico	41

A	Integrali	48
A.1	Distribuzione Gaussiana	48
A.2	Distribuzione di Cauchy (o Lorentziana)	49

Introduzione

L'effetto Hall, scoperto da Edwin Hall nel 1879, consiste nella presenza di una differenza di potenziale, detto potenziale di Hall, all'interno di un conduttore elettrico dovuta a un campo magnetico perpendicolare alla corrente elettrica che scorre in esso. Inoltre la resistenza di Hall risulta dipendente linearmente con il campo magnetico.

Nel 1980 Klaus von Klitzing ottenne dei risultati del tutto inattesi: in un gas di elettroni confinato in un piano in presenza di un campo magnetico perpendicolare al piano stesso la conduttanza di Hall risulta quantizzata e mostra dei plateau in corrispondenza di particolari valori del campo stesso. Per questo risultato fu insignito del premio Nobel nel 1985.

Un sistema di elettroni in 2 dimensioni è realizzato per mezzo di un transistor ad effetto campo, i modelli con caratteristiche di grande purezza e mobilità sono le eterogiunzioni GaAs-AlGaAs, il cui progresso tecnologico è strettamente legato all'analisi dell'effetto Hall: grazie all'enorme sviluppo nella costruzione dei dispositivi a semiconduttore, è stato possibile realizzare misure sempre più accurate che hanno mostrato dettagli inaspettati quali i valori di filling frazionari e il comportamento relativistico nel grafene.

L'ambito discusso nell'elaborato è l'effetto Hall quantistico intero: per un insieme di elettroni non interagenti in due dimensioni, sotto l'azione di un campo magnetico perpendicolare, il comportamento quantistico diventa prevalente.

Dopo aver discusso l'invarianza di gauge del sistema in campo magnetico si procede al calcolo dei livelli energetici quantizzati detti livelli di Landau e dei relativi autostati. Per un sistema non confinato in presenza del solo campo magnetico si sceglie la gauge simmetrica: il sistema risulta analogo ad un oscillatore armonico i cui autovalori, dipendenti dal campo magnetico, risultano quantizzati e le autofunzioni risultano espresse in funzione dei polinomi di Laguerre. Aggiungendo il campo elettrico risulta più adatta una rappresentazione per mezzo della gauge di Landau: il sistema risulta analogo ad un oscillatore armonico il cui centro del potenziale risulta traslato. Gli autovalori, quantizzati, dipendono dal campo elettrico e magnetico e le autofunzioni risultano espresse in funzione dei polinomi di Hermite.

L'elaborato prosegue considerando sistemi confinati e pone particolare attenzione al comportamento degli stati di bordo del sistema: prima è presentata un'analisi attraverso un approccio analitico del problema, in cui le autofunzioni risultano espresse in termini delle funzioni paraboliche cilindriche e gli autovalori dipendenti dalla posizione rispetto al bordo, quindi un'analisi numerica.

Per presentare un'analisi esaustiva dell'effetto Hall quantistico intero e giustificare la presenza dei plateau nell'andamento della conduttanza di Hall è necessario introdurre l'effetto dello scattering dovuto alle impurità e alle in-

mogeneità del campione all'interno del potenziale: la presenza del disordine comporta che gli stati del sistema risultino distinti in stati detti localizzati, intrappolati in una particolare regione microscopica del sistema e su cui un campo elettrico esterno non può indurre transizioni, e stati estesi che attraversano tutto il sistema e contribuiscono al trasporto della corrente. Sono quindi analizzati la localizzazione di Anderson e il modello di Laughlin.

In seguito, prima di presentare un'approccio formale all'effetto del disordine sulla distribuzione degli stati del sistema, si introduce un'analisi sull'algebra di Grassmann. Dopo averne analizzato le proprietà di antisimmetria, si definiscono la derivata e l'integrale calcolato sull'algebra generata dalle variabili di Grassmann. Particolare attenzione è data all'integrale gaussiano che mostra un comportamento inverso rispetto all'analogo calcolato col le variabili commutanti.

Introducendo un'algebra di Grassmann generata un insieme di variabili complesse commutanti e da un insieme di variabili anticommutanti è posta particolare attenzione alla proprietà di supersimmetria: si dimostra in modo rigoroso la relazione di Parisi-Sourlas; mediante l'utilizzo di un supercampo, risulta una forte analogia tra un sistema D -dimensionale in presenza di un campo esterno random e un sistema $(D-2)$ -dimensionale privo del campo random.

Quindi si procede ad un'approfondita analisi sugli effetti del disordine nell'effetto Hall quantistico intero: si calcola la funzione di Green del sistema dopo averne dimostrato la relazione con la distribuzione degli stati del sistemi. Introducendo un opportuno campo fittizio fermionico si evidenzia la presenza di una supersimmetria nascosta: questa condizione è fondamentale per l'analisi del sistema. È quindi possibile, mediante l'utilizzo della relazione di Parisi-Sourlas, calcolare il valore di aspettazione della funzione di Green per una generica distribuzione di probabilità del disordine.

Il risultato ottenuto evidenzia la profonda differenza della distribuzione degli stati in presenza del disordine rispetto alla situazione ideale. L'elaborato si conclude con l'analisi del risultato ottenuto considerando diverse distribuzioni di probabilità per descrivere il disordine: la distribuzione gaussiana, la distribuzione di Poisson ed infine quella di Cauchy.

Capitolo 1

Effetto Hall

1.1 Effetto Hall classico

Nell'ottobre del 1879, appena una settimana prima della morte di James Clerk Maxwell, Edwin Erbert Hall ottenne i primi risultati positivi sull'effetto che oggi porta il suo nome [3][4]. Durante i suoi studi universitari Hall studiò proprio il Trattato di elettricità e magnetismo di Maxwell, dove lesse: “Deve essere attentamente ricordato che la forza meccanica che subisce un conduttore in un campo magnetico [...] agisce, non sulla corrente elettrica che lo attraversa, ma sul conduttore che la trasporta”. Hall dubitò dell'affermazione letta in quanto la forza di Lorentz si verifica solo in presenza di una corrente attraverso il conduttore ed è direttamente proporzionale alla corrente stessa. Iniziò una serie di investigazioni che lo portarono a scoprire che, in un sistema di elettroni 2-dimensionale, il campo magnetico altera la distribuzione di carica nel conduttore mostrando una differenza di potenziale trasverso tra i bordi del conduttore, detto potenziale di Hall.

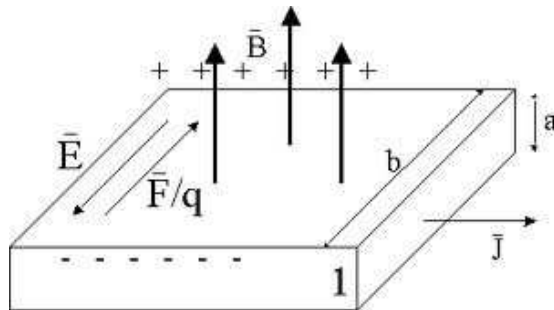


Figura 1.1: Effetto Hall.

Inoltre mostrò che la resistenza trasversa R_H dipende dall'intensità del campo magnetico perpendicolare al sistema:

$$R_H = \frac{B}{en_e}$$

dove e (< 0) è la carica dell'elettrone e n_e la densità superficiale.

1.2 Effetto Hall quantistico intero

Un secolo dopo, nel 1980, Klaus von Klitzing studiò l'effetto Hall in un gas elettronico 2-dimensionale a bassa temperatura e scoprì l'effetto Hall quantistico intero (IQHE) durante la sua attività di ricerca presso il Laboratorio High Magnetic Field (GHMFL) di Grenoble [5]. Per questi risultati fu insignito del premio Nobel nel 1985. In realtà la quantizzazione intera della conduttanza di Hall era già stata predetta teoricamente da Ando, Matsumoto ed Uemura nel 1975 con calcoli approssimati [6].

La scoperta dell'IQHE è stata fortemente legata agli sviluppi tecnologici nella fabbricazione di transistor ad effetto campo di alta qualità che hanno permesso la realizzazione di gas di elettroni 2-dimensionali. L'IQHE si manifesta a basse temperature quando l'ordine di grandezza dell'energia termica $k_B T$ è in modo significativo minore della separazione dei livelli di Landau $\hbar\omega_c$. Consiste nella quantizzazione della resistenza di Hall che non risulta più dipendente in modo lineare dall'intensità del campo magnetico perpendicolare al sistema (come nel caso classico) ma mostra dei plateau rilevanti in corrispondenza di particolari valori del campo stesso.

Inoltre von Klitzing ha sottolineato che, in corrispondenza di tali plateau, la resistenza di Hall è determinata soltanto in termini di costanti universali:

$$R_H = \left(\frac{h}{e^2}\right) \frac{1}{n} \quad (1.1)$$

dove n è un numero intero. Infine i plateau nella resistenza di Hall risultano accompagnati dall'annullamento della resistenza longitudinale.

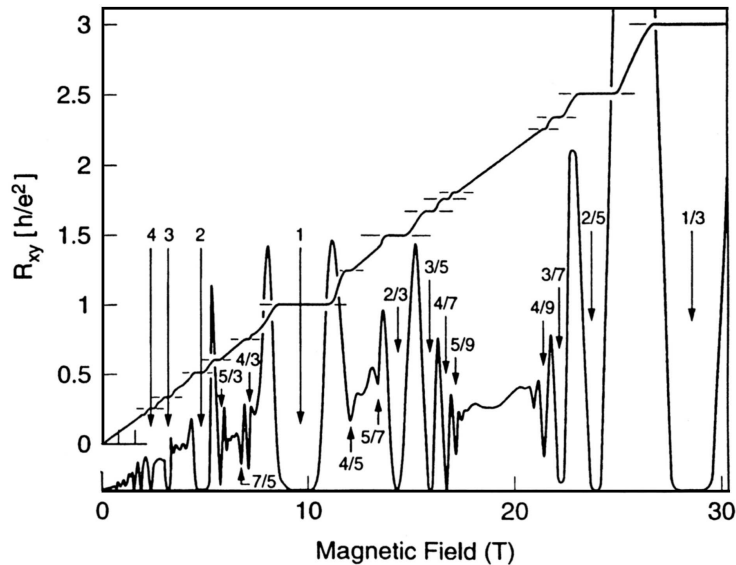


Figura 1.2: I plateau nell'effetto Hall quantistico intero e frazionario.

È importante enfatizzare che la quantizzazione della resistenza di Hall è un fenomeno universale, indipendente dalle proprietà del campione su cui è osservato, quali la geometria, il materiale utilizzato per fabbricare il gas di elettroni 2-dimensionale e la distribuzione o la concentrazione delle sue impurità.

L'universalità del fenomeno è la ragione per cui è nota con enorme precisione la quantizzazione della resistenza di Hall (tipicamente $\sim 10^{-9}$). Dal 1990 la Commissione Internazionale sulla Metrologia ha fissato la resistenza di Hall come resistenza standard

$$R_{K-90} = \frac{h}{e^2} = 25812.807\Omega$$

detta anche costante di Klitzing.

1.3 Effetto Hall quantistico frazionario

Tre anni dopo la scoperta dell'IQHE, un altro inaspettato effetto è stato osservato in un sistema di elettroni 2-dimensionale di maggior qualità: l'effetto Hall quantistico frazionario. Tale effetto prende il nome dal fatto che, contrariamente all'IQHE, dove il numero n nell'equazione (1.1) è un intero, Tsui, Störmer e Gossard scoprirono nel 1982 una quantizzazione della resistenza di Hall con $n = 1/3$ [7].

Come per l'IQHE la resistenza di Hall manifesta una serie di plateau ma l'origine dei due effetti sono completamente differenti: mentre il primo può essere compreso attraverso l'analisi dei livelli di Landau, il FQHE è dovuto alle forte correlazione tra gli elettroni per cui l'interazione di Coulomb diventa rilevante.

Inoltre nel 1983 Laughlin mostrò che l'origine del FQHE con $n = 1/3$, come per ogni $n = 1/q$, dove q è un numero intero dispari, è dovuta alla formazione di un liquido incompressibile di elettroni correlati (correlated incompressible electron liquid) con proprietà estremamente esotiche [8]. Tsui, Störmer, per la scoperta, e Laughlin, per la teorizzazione del FQHE, sono stati insigniti del premio Nobel nel 1998.

1.4 Effetto Hall quantistico relativistico

Recentemente la fisica dell'effetto Hall ha ricevuto un inaspettato impulso con la scoperta di un effetto Hall relativistico nel grafene, un foglio di spessore pari ad un atomo di grafite: gli elettroni nel grafene si comportano come se fossero particelle relativistiche prive di massa. Formalmente il loro comportamento quanto-meccanico non è più descritto in termini dell'equazione di Schrödinger, ma per mezzo dell'equazione relativistica di Dirac. Di conseguenza, la quantizzazione di Landau dell'energia cinetica degli elettroni è differente nel grafene rispetto ai sistemi convenzionali (non relativistici). Ciò produce un effetto Hall quantistico relativistico con un'unusuale serie di plateau: la resistenza di Hall risulta quantizzata secondo la relazione $R_H = \frac{h}{e^2 n}$, dove n assume valori interi determinati da $n = \pm 2(2n' + 1)$, ovvero con $n = \pm 2, \pm 6, \pm 10, \dots$ dove i segni (\pm) indicano le possibili direzione della corrente.

Capitolo 2

Livelli di Landau

Alla base della comprensione dell'effetto Hall quantistico intero c'è la quantizzazione di Landau ovvero la quantizzazione dell'energia cinetica di una particella carica in un sistema 2-dimensionale con campo magnetico perpendicolare. In questo capitolo sarà illustrato, in relazione all'IQHE, il moto di un elettrone in campo magnetico, con particolare attenzione per i livelli di Landau.

2.1 Moto classico di un elettrone in campo magnetico

Si consideri un elettrone in moto nel piano (x, y) immerso in un campo magnetico $\mathbf{B} = B\hat{z}$ perpendicolare al piano stesso. La massa dell'elettrone è denotata da m_e mentre e (< 0) è la carica.

La lagrangiana dell'elettrone, considerando il potenziale vettore \mathbf{A} definito come $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, è

$$L = \frac{1}{2}m_e v^2 + e\mathbf{A}\mathbf{v}$$

Da questa lagrangiana si ottengono le equazioni del moto

$$m_e \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Inoltre si ottengono il momento canonico $\mathbf{p} = m_e \mathbf{v} + e\mathbf{A}$ e quindi l'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m_e} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2$$

L'elettrone descrive un moto rotatorio attorno al centro di coordinata $\mathbf{R} = (X, Y, 0)$ con raggio r_0 . Definita la frequenza ciclotronica $\omega_c = \frac{|e|B}{m_e}$, la soluzione dell'equazione del moto è:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + r_0 (\cos(\omega_c t + \delta), \sin(\omega_c t + \delta), 0)$$

e velocità

$$\mathbf{v} = \omega_c r_0 (-\sin(\omega_c t + \delta), \cos(\omega_c t + \delta), 0)$$

Dove \mathbf{R} e δ sono determinate dalle condizioni iniziali del problema.

Introdotte le variabili $(\xi, \eta, 0)$, che descrivono posizione dell'elettrone rispetto al centro \mathbf{R} , l'equazione del moto possono essere espresse come:

$$\mathbf{R} = (X + \xi, Y + \eta, 0)$$

$$\mathbf{v} = \omega_c (-\eta, \xi, 0)$$

Scegliendo la gauge simmetrica $\mathbf{A} = (-B\frac{y}{2}, B\frac{x}{2}, 0)$ come potenziale vettore, il momento canonico diventa $\mathbf{p} = \frac{1}{2}eB(-Y + \eta, X - \xi, 0)$ e il momento angolare è una costante del moto:

$$L_z = \frac{1}{2}eB(R^2 - r_0^2)$$

2.2 Moto elettrone in campo elettrico

Introducendo ora il campo elettrico esterno \mathbf{E} diretto lungo l'asse x , $\mathbf{E} = E\hat{x}$. L'equazione del moto diventa

$$m_e \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

e la velocità

$$\mathbf{v} = \omega_c r_0 (-\sin(\omega_c t), \cos(\omega_c t) + v_0, 0)$$

dove $v_0 = -\frac{E}{B}$. Il moto è una sovrapposizione del moto ciclotronico e del moto di traslazione con velocità $\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$ perpendicolare sia al campo magnetico, sia a quello elettrico.

È possibile calcolare il tensore di conduttività di un sistema classico di elettroni con velocità media $(0, v_0, 0)$. La densità di corrente risulta:

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{v} = \left(0, -n_e e \frac{E}{B}, 0\right)$$

Ed è direttamente proporzionale al campo elettrico: $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. In particolare risulta $\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{B}{ne}$. La resistività di Hall è $\rho_{xy} = -\rho_{yx} = -\frac{B}{ne}$ e la resistività diagonale è $\rho_{xx} = \rho_{yy} = 0$.

Gli elementi fuori dalla diagonale dipendono in modo continuo da n_e e B e di conseguenza i plateu non si possono formare. Questo risultato mostra come la meccanica classica non spieghi l'effetto Hall quantistico.

2.3 Meccanica quantistica

L'Hamiltoniana nella meccanica quantistica per un elettrone in campo magnetico è definita come segue:

$$H = \frac{1}{2m_e} [\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2 + g\mu_B m_s B$$

dove \mathbf{p} è l'operatore momento canonico che soddisfa la solita relazione di commutazione $[p_\alpha, r_\beta] = -i\hbar\delta_{\alpha,\beta}$ dove $\alpha, \beta = x, y, z$. Per un elettrone il fattore-g di Landé nel vuoto è approssimativamente 2. Con μ_B è denotato il magnetone di Bohr e $m_s = \pm 1/2$ è lo spin dell'elettrone.

Nell'analisi successiva non verrà considerato il secondo termine riguardante il grado di libertà dello spin, concentrandoci solo sulla parte orbitale dell'Hamiltoniana. Inoltre sarà trascurata l'interazione elettrone-elettrone.

In assenza di campo elettromagnetico, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = 0$, gli elettroni si muovono liberamente nel piano (x, y) e sono descritti da onde piane con energia $\epsilon_k = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2}{2m_e} (k_x^2 + k_y^2)$ e vettore d'onda $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y)$.

Prima di procedere al calcolo della funzione d'onda dell'elettrone è necessario porre attenzione alla scelta della gauge opportuna per il sistema considerato e come tale scelta influisca sulla funzione d'onda stessa.

2.3.1 Invarianza di Gauge

Fissato il campo magnetico, la scelta di un potenziale vettore non è univoca. L'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal campo magnetico ma solo dal potenziale vettore. Una diversa scelta per il potenziale vettore comporta risultati diversi per la funzione d'onda del sistema [10].

Per non perdere generalità nella trattazione è interessante osservare come la funzione d'onda dipenda dal potenziale vettore. Per una arbitraria funzione regolare e reale $\chi(\mathbf{r})$ si definisce una trasformazione di gauge:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r})$$

dove i potenziali vettori $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ descrivono lo stesso campo magnetico.

Sia $|\phi(\mathbf{r})\rangle$ un'autofunzione relativa all'autovalore E dell'Hamiltoniana che dipende da $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$H = \frac{1}{2m_e} [\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2$$

L'autofunzione relativa allo stesso autovalore E dell'Hamiltoniana dove \mathbf{A} è sostituito da \mathbf{A}' è denotata da $|\phi'(\mathbf{r})\rangle$.

χ e \mathbf{A} sono funzioni dell'operatore posizione \mathbf{r} . È necessario che i valori di aspettazione in meccanica quantistica si comportino in modo simile alle corrispondenti quantità classica sotto trasformazioni di gauge, pertanto $\langle \mathbf{r} \rangle$ e $\langle \mathbf{p} - e\mathbf{A} \rangle$ non devono variare mentre ci si aspetta che $\langle \mathbf{p} \rangle$ vari:

$$\langle \phi(\mathbf{r}) | \mathbf{r} | \phi(\mathbf{r}) \rangle = \langle \phi'(\mathbf{r}) | \mathbf{r} | \phi'(\mathbf{r}) \rangle \quad (2.1)$$

$$\langle \phi(\mathbf{r}) | (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) | \phi(\mathbf{r}) \rangle = \langle \phi'(\mathbf{r}) | (\mathbf{p} - e\mathbf{A}') | \phi'(\mathbf{r}) \rangle \quad (2.2)$$

Inoltre la norma si deve conservare:

$$\langle \phi(\mathbf{r}) | \phi(\mathbf{r}) \rangle = \langle \phi'(\mathbf{r}) | \phi'(\mathbf{r}) \rangle$$

È utile definire un operatore \mathcal{G} che leghi $|\phi(\mathbf{r})\rangle$ e $|\phi'(\mathbf{r})\rangle$:

$$|\phi'(\mathbf{r})\rangle = \mathcal{G} |\phi(\mathbf{r})\rangle$$

Le proprietà di invarianza (2.1) e (2.2) sono garantite se valgono:

$$\mathcal{G}^\dagger \mathbf{r} \mathcal{G} = \mathbf{r} \quad (2.3)$$

$$\mathcal{G}^\dagger (\mathbf{p} - e\mathbf{A} - e\nabla\chi) \mathcal{G} = \mathbf{p} - e\mathbf{A} \quad (2.4)$$

Si pone:

$$\mathcal{G} = \exp \left[\frac{ie\chi(\mathbf{r})}{\hbar} \right]$$

\mathcal{G} è unitario, pertanto conserva la norma. Inoltre (2.3) è ovviamente soddisfatto poichè \mathbf{r} commuta con ogni funzione di \mathbf{r} . Per dimostrare (2.4):

$$\begin{aligned} \exp - \left(\frac{ie\chi(\mathbf{r})}{\hbar} \right) \mathbf{p} \exp \left(\frac{ie\chi(\mathbf{r})}{\hbar} \right) &= \exp \left(-\frac{ie\chi(\mathbf{r})}{\hbar} \right) \left[\mathbf{p}, \exp \left(\frac{ie\chi(\mathbf{r})}{\hbar} \right) \right] + \mathbf{p} \\ &= - \exp \left(\frac{ie\chi(\mathbf{r})}{\hbar} \right) i\hbar \nabla \left[\exp \left(\frac{ie\chi(\mathbf{r})}{\hbar} \right) \right] + \mathbf{p} = \mathbf{p} + e\nabla\chi \end{aligned}$$

In conclusione:

$$|\phi'(\mathbf{r})\rangle = |\phi(\mathbf{r})\rangle e^{ie\chi(\mathbf{r})/\hbar}$$

Poichè χ è una funzione reale, la scelta di Gauge non influisce sulla probabilità $|\phi(\mathbf{r})|^2$ di trovare un elettrone in r . L'invarianza di una osservabile rispetto alla libertà della scelta del potenziale vettore è detta *invarianza di gauge*.

2.3.2 Livelli di Landau

Per descrivere un elettrone in campo magnetico è necessario sostituire il momento \mathbf{p} con un operatore invariante sotto trasformazioni di gauge (2.2), detto momento dinamico:

$$\mathbf{p} \rightarrow \boldsymbol{\pi} = m_e \mathbf{v} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$$

Le componenti del momento dinamico non commutano tra loro:

$$\begin{aligned} [\pi_x, \pi_y] &= [p_x + eA_x(\mathbf{r}), p_y + eA_y(\mathbf{r})] = e \{ [p_x, A_y] - [p_y, A_x] \} \\ &= -ie\hbar \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = -ie\hbar (\nabla \times \mathbf{B})_z = -ie\hbar B = -i \frac{\hbar^2}{l_B^2} \end{aligned}$$

Nella quale si introduce la lunghezza magnetica $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{|e|B}}$.

Questo risultato è molto interessante: il commutatore delle due componenti di $\boldsymbol{\pi}$ che, come visto in precedenza, sono gauge invarianti, è anch'esso gauge invariante e, inoltre, dipende soltanto da costanti universali e dal campo magnetico B , anch'esso gauge invariante.

In termini del momento dinamico l'Hamiltoniana diventa:

$$H = \frac{1}{2m_e} \boldsymbol{\pi}^2 = \frac{1}{2m_e} (\pi_x^2 + \pi_y^2)$$

Notando che gli operatori π_x e π_y compaiono in forma quadratica, l'Hamiltoniana ha la stessa struttura algebrica di un oscillatore armonico monodimensionale.

Risulta quindi utile introdurre gli operatori di creazione e distruzione con la solita regola di commutazione $[a, a^\dagger] = 1$:

$$a = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}} (\pi_x - i\pi_y) \quad a^\dagger = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}} (\pi_x + i\pi_y)$$

L'Hamiltoniana può essere riscritta come

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.5)$$

Gli autostati dell'Hamiltoniana (2.5) sono li stessi dell'operatore numero $a^\dagger a$: $a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$. Gli operatori di creazione e distruzione agiscono nel solito modo:

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

dove $n > 0$. $|0\rangle$ è definito come il ground state tale che $a|0\rangle = 0$.

L'autostato associato al n-esimo livello energetico è determinato dalla relazione:

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

I livelli energetici sono discretizzati come per l'oscillatore armonico $E_n = \hbar\omega (n + \frac{1}{2})$. Questi livelli discreti di energia sono detti *livelli di Landau*.

2.3.3 Degenerazione dei livelli di Landau

Per una descrizione completa degli stati quantistici, è necessario individuare una seconda coppia di operatori coniugati (oltre a a^\dagger e a) che necessariamente commuti con l'Hamiltoniana e che risolva il problema legato alla degenerazione dei livelli di Landau.

In analogia con il momento canonico gauge invariante, $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r})$, si definisce lo *pseudo-momento* $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ con la stessa combinazione, ma segno opposto:

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r})$$

È possibile esprimere il momento \mathbf{p} e il potenziale vettore \mathbf{A} in funzione di $\boldsymbol{\pi}$ e $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\pi} + \tilde{\boldsymbol{\pi}}) \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2e} (\boldsymbol{\pi} - \tilde{\boldsymbol{\pi}})$$

Si noti che, al contrario del momento canonico, lo pseudo-momento non è gauge-invariante, al contrario del commutatore tra le sue componenti:

$$[\tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_y] = i \frac{\hbar^2}{l_B^2}$$

Quest'ultimo commutatore può essere agevolmente calcolato nel medesimo modo del commutatore $[\pi_x, \pi_y]$ come anche i commutatori misti tra le componenti del momento canonico e dello pseudo-momento:

$$\begin{aligned} [\pi_x, \tilde{\pi}_x] &= 2ie\hbar \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ [\pi_y, \tilde{\pi}_y] &= 2ie\hbar \frac{\partial A_y}{\partial y} \\ [\pi_x, \tilde{\pi}_y] &= ie\hbar \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) = -[\tilde{\pi}_x, \pi_y] \end{aligned}$$

Inoltre è importante osservare che le componenti dello pseudo-momento non commutano con l'Hamiltoniana, $[\tilde{\pi}_{x/y}, H] \neq 0$. Per descrivere il sistema evitando questa complicazione è sufficiente scegliere l'appropriata gauge (come già detto lo pseudo-momento dipende dalla scelta di gauge), ovvero la gauge simmetrica:

$$\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$$

Con questa scelta di gauge anche i commutatori misti si annullano. Il sistema gode comunque dell'invarianza di gauge e una diversa scelta di gauge comporta i medesimi risultati.

Analogamente a come fatto in precedenza è possibile introdurre un altro paio di operatori di distruzione e creazione b, b^\dagger che soddisfino $[b, b^\dagger] = 1$ così definiti:

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}l_B} (\tilde{\pi}_x + i\tilde{\pi}_y) \quad b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}l_B} (\tilde{\pi}_x - i\tilde{\pi}_y)$$

Ovviamente commutano con gli operatori a^\dagger e a e con l'Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} [b, a] &= [b^\dagger, a] = 0 \\ [b, H] &= [b^\dagger, H] = 0 \end{aligned}$$

Anche in questo caso è possibile introdurre l'operatore numero $b^\dagger b$: $b^\dagger b |m\rangle = m |m\rangle$ in modo tale da ottenere un nuovo numero quantico m necessario per descrivere l'autostato. L'autostato quindi diventa il prodotto tensore di due spazi di Hilbert:

$$|n, m\rangle = |n\rangle \otimes |m\rangle$$

2.3.4 Autostati

Come visto finora, lo stato di un elettrone, nella gauge simmetrica, può essere descritto da un ket $|n, m\rangle$ dove $m, n \geq 0$. $|n, m\rangle$ è un autostato simultaneo di $a^\dagger a$ e $b^\dagger b$: $a^\dagger a |n, m\rangle = n |n, m\rangle$ e $b^\dagger b |n, m\rangle = m |n, m\rangle$.

Con lo scopo di ottenere la funzione d'onda nella rappresentazione delle coordinate rappresento a, a^\dagger, b e b^\dagger in funzione delle coordinate originali $\mathbf{r} = (x, y)$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar} (\pi_x - i\pi_y) = \frac{1}{\sqrt{2}l_B} \left[-\frac{i}{2} (x - iy) - il_B^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \\ b &= \frac{1}{\sqrt{2}l_B} (\tilde{\pi}_x + i\tilde{\pi}_y) = \frac{1}{\sqrt{2}l_B} \left[\frac{i}{2} (x + iy) + l_B^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

È utile riscrivere le espressioni precedenti introducendo le coordinate complesse $z = \frac{x-iy}{l_B}$ e $\bar{z} = \frac{x+iy}{l_B}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{l_B}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{l_B}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{l_B} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{i}{l_B} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{cases}$$

Da cui si ottengono gli operatori di creazione e distruzione in funzione delle variabili (z, \bar{z}) :

$$\begin{aligned} a &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) & a^\dagger &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\bar{z}}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ b &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\bar{z}}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) & b^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned}$$

Il ground-state è descritto dal ket $|0, 0\rangle$ e gode delle seguenti proprietà:

$$a|0, 0\rangle = 0 \qquad b|0, 0\rangle = 0$$

Posto $\langle \mathbf{r} | n, m \rangle = \varphi_{n,m}(\mathbf{r})$ ed in particolare $\langle \mathbf{r} | 0, 0 \rangle = \varphi_{0,0}(\mathbf{r})$, la funzione d'onda del ground-state è la soluzione dell'equazione differenziale

$$\langle \mathbf{r} | a | 0, 0 \rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \varphi_{0,0}(\mathbf{r}) = 0$$

La soluzione generica della funzione d'onda per $|0, 0\rangle$ nella rappresentazione delle coordinate è:

$$\varphi_{0,0}(\mathbf{r}) = \lambda e^{-\frac{|z|^2}{4}} = \lambda e^{-\frac{r^2}{4l_B^2}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Il valore della costante λ è conseguenza della normalizzazione della funzione d'onda: $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_B}$. Per cui la soluzione nella rappresentazione delle coordinate è:

$$\varphi_{0,0}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_B} e^{-\frac{|z|^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_B} e^{-\frac{r^2}{4l_B^2}}$$

Le altre funzioni d'onda si ottengono per mezzo degli operatori di creazione a^\dagger e b^\dagger :

$$\varphi_{n,m}(\mathbf{r}) = \frac{a^{\dagger n} b^{\dagger m}}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} \varphi_{0,0}(\mathbf{r})$$

In coordinate polari (r, θ) , il risultato può essere scritto come

$$\varphi_{n,m}(\mathbf{r}) = C_{n,m} \exp\left(i(n-m)\theta - \frac{r^2}{4l_B^2}\right) \left(\frac{r}{l_B}\right)^{|m-n|} \times L_{(n+m-|m-n|)/2}^{|m-n|} \left(\frac{r^2}{4l_B^2}\right)$$

$C_{n,m} \in \mathbb{R}$ è una costante di normalizzazione e $L_m^n(x)$ sono i polinomi di Laguerre.

Nei prossimi capitoli le funzioni d'onda del più piccolo livello di Landau, $n = 0$, ha un ruolo fondamentale.

$$\varphi_{0,m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2^m m! l_B} z^m e^{-\frac{|z|^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2^m m! l_B} \left(\frac{x-iy}{l_B}\right)^m e^{-\frac{r^2}{4l_B^2}}$$

Questa funzione d'onda rappresenta un elettrone localizzato circolarmente. Il massimo della probabilità $|\varphi_{0,m}|^2$ è in corrispondenza della circonferenza di raggio $\sqrt{2ml_B}$. Il valore di aspettazione di r^2 è $\langle 0, m | r^2 | 0, m \rangle = 2(m+1)l_B^2$. Non si deve considerare questa circonferenza come un'orbita ciclotronica classica di un elettrone: lo stato $|0, m\rangle$ è una combinazione lineare di diverse orbite ciclotroniche con raggio l_B e centro all'interno della circonferenza di raggio $\sqrt{2ml_B}$.

La gauge simmetrica è la gauge naturale per descrivere un sistema di forma circolare. Si consideri quindi un sistema di raggio R e superficie $S = \pi R^2$ dove non saranno considerati gli stati tali che $2ml_B^2 > R^2$. Il numero totale di stati a singolo elettrone sono $S/2\pi l_B^2$: C'è quindi un elettrone per ogni superficie di area $2\pi l_B^2$ (questo è vero anche per i livelli di Landau superiori): per un sistema di area $2\pi l_B^2$, ogni livello di Landau ha una degenerazione di $S/2\pi l_B^2$.

Il flusso magnetico che attraversa l'area $2\pi l_B^2$ di un elettrone è $2\pi l_B^2 B = h/|e| \equiv \phi_0$.

ϕ_0 è l'unità di flusso magnetico e costituisce un quanto del flusso.

2.3.5 Fase di Aharonov-Bohm

Lo stato $|0, m\rangle$ è localizzato circolarmente e, lungo la circonferenza di raggio $\sqrt{2ml_B}$, la fase della relativa funzione d'onda varia di $-2\pi m$. Si può interpretare questo cambio di fase come la fase di Aharonov-Bohm (AB) che un elettrone acquisisce quando un elettrone si muove all'interno di un flusso magnetico. La fase AB acquisita lungo una curva chiusa è data da:

$$\phi = \frac{e}{\hbar} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \frac{e}{\hbar} \int B_n dS = \frac{e\Phi}{\hbar}$$

Dove Φ è il flusso totale all'interno della curva chiusa. Inoltre l'area che uno stato $|0, m\rangle$ copre è $2m\pi l^2$ e il flusso magnetico totale è $\Phi = m\phi_0$. Considerando la relazione precedente che definisce il quanto di flusso, il cambiamento di fase dovuto al momento angolare è quindi uguale alla fase AB: in altre parole uno stato con un momento angolare finito deve essere associato ad un corrispondente flusso magnetico.

2.4 Elettrone in campo elettrico

Si consideri ora un sistema di lunghezza L , molto più grande della larghezza, in presenza di un campo elettrico esterno diretto lungo l'asse x . In questo caso il momento angolare non si conserva, quindi la gauge simmetrica non risulta appropriata. Si preferisce invece la gauge di Landau che rispetta l'invarianza traslazionale nella direzione x :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (0, Bx, 0).$$

L'Hamiltoniana diventa:

$$H = \frac{1}{2m_e} \left[p_x^2 + (p_y - eBx)^2 \right] - eEx$$

Il momento lungo l'asse y si conserva in questa gauge. quindi si può procedere secondo l'ipotesi che la funzione d'onda sia

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_y y} \psi(x)$$

Si ottiene dunque l'equazione di Schrödinger per $\psi(x)$:

$$\left(\frac{1}{2m_e} \left[p_x^2 + (\hbar k_y - eBx)^2 \right] - eEx \right) \psi(x) = \mathcal{E} \psi(x)$$

Dove \mathcal{E} è l'autovalore dell'energia associato all'autostato $\psi(x)$. Per semplificare la notazione risulta utile introdurre la coordinata relative al centro del potenziale:

$$x_0 = -k_y l_B^2 + \frac{eE m_e l_B^4}{\hbar^2}$$

È da notare che è una funzione lineare del momento nella direzione y . Quindi si ottiene

$$\left[\frac{1}{2m_e} p_x^2 + \frac{m_e \omega_c^2}{2} (x - x_0)^2 \right] \psi(x) = \left[\mathcal{E} + eE x_0 - \frac{m_e}{2} \left(\frac{E}{B} \right)^2 \right] \psi(x)$$

Si nota l'analogia con l'equazione di Schrödinger di un oscillatore il cui potenziale è centrato x_0 .

Le autofunzioni possono essere scritte mediante i polinomi di Hermite:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

nel modo seguente:

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2^n n! l_B} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2l_B^2}} H_n \left(\frac{x-x_0}{l_B} \right)$$

Gli autovalori dell'Hamiltoniana sono:

$$\mathcal{E}_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c - eE x_0 + \frac{m_e}{2} \left(\frac{E}{B} \right)^2$$

Il primo termine è l'energia ciclotronica (come per un oscillatore armonico), il secondo termine è l'energia potenziale dovuto alla presenza del campo elettrico ed infine l'ultimo termine è l'energia cinetica dovuta al moto di traslazione. L'energia quindi è analoga al caso classico, eccetto per il fatto che il primo termine è quantizzato.

La funzione d'onda è estesa lungo una linea equipotenziale perpendicolare al campo elettrico. I valori di aspettazione degli operatori velocità di un generico stato sono:

$$\langle \varphi | v_x | \varphi \rangle = \left\langle \varphi \left| \frac{p_x}{m_e} \right| \varphi \right\rangle = 0$$

e

$$\langle \varphi | v_y | \varphi \rangle = \left\langle \varphi \left| \frac{1}{m_e} (p_y - eBx) \right| \varphi \right\rangle = \left\langle \varphi \left| \left(\frac{eB}{m_e} (x_0 - x) - \frac{E}{B} \right) \right| \varphi \right\rangle = -\frac{E}{B}$$

In conclusione l'elettrone si muove in direzione perpendicolare al campo elettrico con velocità $\frac{E}{B}$ esattamente come nel caso classico.

Il risultato ottenuto fin qui indica che il tensore di conduttività di un sistema di elettroni non interagenti in due dimensioni con numero di particelle per unità di superficie n_e è dato da $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = n_e e/B$, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$: è la stessa forma già calcolata nel caso classico.

Per giustificare i risultati sperimentali dell'effetto Hall quantistico è si prenderanno in considerazione gli effetti di interazione delle impurità con gli elettroni.

2.5 Effetti di Bordo

Gli stati elettronici al bordo del sistema svolgono un ruolo fondamentale nella seguente discussione. Il bordo può essere descritto come un potenziale confinante e le proprietà dello stato dell'elettrone dipende dalla forma di questo potenziale. L'analisi degli stati di bordo saranno analizzati prima analiticamente [11][12] e quindi numericamente[13].

2.5.1 Risultato esatto

Si procede dunque all'analisi di un elettrone confinato in un sistema rettangolare di variabili (x, y) , $0 < x < L_x$, $0 < y < L_y$ con Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m_e} \left[p_x^2 + (p_y - eBx)^2 \right] - eEx$$

In analogia al caso precedente si procede all'assunzione

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{l_B L_y}} e^{ik_y y} \varphi\left(\frac{x}{l_B}\right)$$

Introducendo le variabili ausiliari adimensionali

$$\xi = \frac{x}{l_B} \quad \mathbb{E} = E \frac{em_e l_B^3}{\hbar^2}$$

$$\xi_0 = k_y l_B - \mathbb{E} \quad \xi_x = \frac{L_x}{l_B}$$

$$\epsilon = \frac{2E}{\hbar\omega_C} - 2k_y l_B \mathbb{E} + \mathbb{E}^2$$

si ottiene l'equazione di Weber:

$$-\varphi''(\xi) + (\xi - \xi_0)^2 \varphi(\xi) = \epsilon \varphi(\xi)$$

La soluzione generale è una combinazione lineare delle funzioni paraboliche cilindriche [14]:

$$\varphi_{p,k}(\xi) = AD_p \left(\sqrt{2}(\xi - \xi_0) \right) + BD_p \left(-\sqrt{2}(\xi - \xi_0) \right)$$

Dove A e B sono parametri reali da determinare imponendo le condizioni al contorno, $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(\xi_x) = 0$, insieme alla condizione di normalizzazione $\int_0^{\xi_x} \varphi(\xi) d\xi = 1$.

Per un fissato valore del parametro ξ_0 , le diverse soluzioni sono ortogonali tra loro e corrispondono ad una successione di autovalori discreti:

$$\epsilon_p(\xi_0) = 2p(\xi_0) + 1 \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Ogni autovalore, come funzione di ξ_0 , è costante finchè $\xi_0 \gg 0$ e $\xi_0 \ll \xi_x$. Quando ξ_0 assume valori vicini al bordo, od oltre, ϵ tende valori sempre più grandi.

Per studiare le soluzioni dell'equazione di Weber si procede ad una breva analisi relativa ai momenti.

Momenti

Si definisce il momento della posizione di un'autostato

$$\langle (\xi - \xi_0)^n \rangle = \int_0^{\xi_x} \varphi(\xi)^2 (\xi - \xi_0)^n d\xi$$

Esiste una relazione ricorsiva tra i momenti:

$$\begin{aligned} & -2(n+1) \langle (\xi - \xi_0)^{n+1} \rangle + 2n(2p+1) \langle (\xi - \xi_0)^{n-1} \rangle \\ & + \frac{1}{2}n(n-1)(n-2) \langle (\xi - \xi_0)^{n-3} \rangle = (\xi_x - \xi_0)^n \varphi'(\xi_x)^2 - (-\xi_0)^n \varphi'(0)^2 \end{aligned}$$

Quest'ultima relazione è dimostrabile integrando per parti l'equazione di Weber moltiplicata $(\xi - \xi_0)^{n-1} \varphi(\xi)$ e imponendo che la funzione φ si annulli in $\xi = 0$ e $\xi = \xi_x$.

Proseguendo risulteranno utili i momenti tali che $n = 1$

$$\langle \xi \rangle - \xi_0 = \frac{1}{2} \left\{ \varphi'(\xi_x)^2 - \varphi'(0)^2 \right\}$$

e $n = 2$

$$\langle (\xi - \xi_0)^2 \rangle = p + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left\{ (\xi_x - \xi_0) \varphi'(\xi_x)^2 + \xi_0 \varphi'(0)^2 \right\}$$

Inoltre è possibile calcolare un'altra relazione che coinvolge il valore di aspettazione dell'Hamiltoniana: $\langle \varphi | H | \varphi \rangle = 2p + 1$. Calcolando la derivata rispetto al parametro ξ_0 si ottiene

$$\frac{dH}{d\xi_0} = -2(\xi - \xi_0) \Rightarrow \left\langle \varphi \left| \frac{dH}{d\xi_0} \right| \varphi \right\rangle = -2(\langle \xi \rangle - \xi_0)$$

Infine utilizzando la relazione (2.6) si ottiene la relazione

$$\langle \xi \rangle - \xi_0 = -\frac{dp}{d\xi_0} \quad (2.7)$$

Stati di bulk e stati di bordo

Per continuare l'analisi delle soluzioni dell'equazione di Weber è importante sottolineare una proprietà delle funzioni paraboliche cilindriche: quando assumono grandi valori di $|\xi - \xi_0|$ divergono come $\exp[(\xi - \xi_0)/2]$ o si annullano come $\exp[-(\xi - \xi_0)/2]$.

Quindi, in base al valore che assume ξ_0 , le soluzioni si possono dividere in stati di bordo (destra o sinistra) o stati di bulk.

Gli stati di bordo sinistro sono caratterizzati dal parametro ξ_0 che assume valori in un intorno di $\xi = 0$ e tali che $\varphi'(0) \neq 0$. Corrispondono alle soluzioni (2.5.1) in cui la costante B è nulla. Il decadimento esponenziale garantisce che la condizione $\varphi(\xi_x) = 0$ sia verificata. La condizione di annullamento, $D_p(-\sqrt{2}\xi_0) = 0$, permette di valutare la funzione $p(\xi_0)$.

In modo analogo gli stati di bordo destro sono caratterizzati dal parametro ξ_0 che assume valori in un intorno di $\xi = \xi_x$ e tali che $\varphi'(0) \neq 0$. Corrispondono alle soluzioni (2.5.1) in cui $A = 0$. Il decadimento esponenziale garantisce che

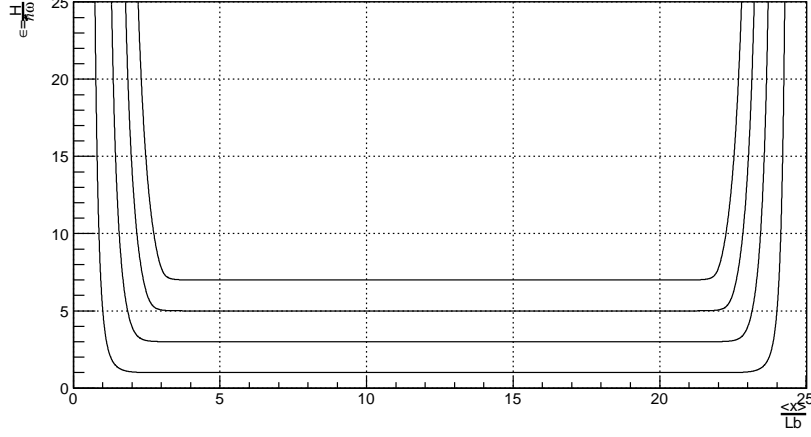


Figura 2.1: Livelli di Landau: stati di bulk e stati di bordo.

la condizione $\varphi(0) = 0$ sia verificata. La condizione $D_p(\sqrt{2}\xi_0) = 0$ permette infine di valutare la funzione $p(\xi_0)$.

Infine si possono analizzare gli stati di bordo estremi, caratterizzati dalla condizione $\xi_0 \ll 0$ o $\xi_0 \gg \xi_x$. In questi casi nell'equazione (2.7) si può assumere $\langle \xi \rangle = 0$ o $\langle \xi \rangle = \xi_x$ che comporta:

$$p(\xi_0) \simeq \frac{1}{2}\xi_0^2 \quad |\xi_0| \rightarrow \infty$$

Invece gli stati di bulk hanno un'interazione trascurabile con il bordo e hanno il medesimo comportamento di un oscillatore armonico il cui potenziale è centrato in ξ_0 e la cui autofunzione è calcolata lungo una linea infinita:

$$\varphi_{k,p}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^p p!}} e^{-\frac{1}{2}(\xi - \xi_0)^2} H_p(\xi - \xi_0)$$

Gli autovalori sono $\epsilon_p = 2p + 1$, dove p assume solo valori interi, indipendentemente da ξ_0 .

Inoltre poichè il parametro $\xi_0 = k_y l_B - \mathbb{E}$ è quantizzato, gli stati di bulk ($0 \ll \xi_0 \ll \xi_x$) sono caratterizzati da una degenerazione degli autovalori

$$g_{LL} = \frac{L_x L_y}{2\pi l_B^2}$$

Corrente e Iqhe

La densità di corrente associata ad uno stato è

$$J_i(x, y) = -i \frac{e\hbar}{2m_e} \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_i} \psi - \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) - \frac{e^2}{m_e} \bar{\psi} \psi A_i$$

In particolare per un autostato del sistema finora analizzato risulta

$$J_x(x) = 0 \quad J_y(x) = -\frac{e^2 B}{m_e} \frac{\varphi(\xi)^2}{L_y} (\xi - k_y l_B)$$

La corrispondente corrente:

$$I_{k,p} = \int_0^{L_x} dx J_y(x) = -\frac{e^2 B}{m_e} \frac{1}{L_y} \int_0^{\xi_x} l_B d\xi (\xi - k_y l_B)$$

$$I_{k,p} = -\frac{e^2 B}{m_e} \frac{l_B}{L_y} (\langle \xi \rangle - k_y l_B) = \frac{e^2 B}{m_e} \frac{l_B}{L_y} \left(\frac{dp}{d\xi_0} + \mathbb{E} \right)$$

Nel conduttore, ogni stato di bulk partecipa alla corrente totale con lo stesso contributo direttamente proporzionale al campo elettrico. Gli stati di bordo invece contribuiscono alla corrente con un'ulteriore componente, negativa per gli stati di bordo sinistro e positiva per quelli di bordo destro (o viceversa se la direzione del campo elettrico è opposta).

In conclusione, trascurando gli stati di bordo, la corrente trasportata da N elettroni in stato di bulk è

$$I_b = N \frac{e^2 B}{m_e} \frac{l_B}{L_y} \mathbb{E} = -\frac{e^2}{h} \frac{N}{g_{LL}} V$$

dove $V = -eEL_x$ è la differenza di potenziale trasversa. Quindi la conduttanza trasversa per gli elettroni di bulk è

$$\sigma_{yx} = \frac{I_b}{V} = 2\nu \frac{e^2}{h}$$

dove ν è il fattore di filling che, in questo modello, può assumere qualsiasi valore. Per completare l'analisi dell'effetto Hall quantistico intero è necessario considerare lo scattering con le impurità del sistema che si rivela la causa per cui la conduttanza risulti quantizzata con discontinuità nei valori interi del fattore di filling (σ_{yx} è sensibile solo alla parte intera del fattore di filling).

2.5.2 Simulazione numerica

Si procede dunque all'analisi numerica di un elettrone confinato in un sistema rettangolare di variabili (x, y) , $0 < x < L_x$, $0 < y < L_y$ con Hamiltoniana indipendente dal tempo

$$H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m_e \omega^2}{2} (x - x_0)^2 + \frac{m_e}{2} \left(\frac{E}{B} \right)^2 - eEx_0$$

È possibile ottenere una soluzione numerica utilizzando l'algebra delle matrici. Per descrivere il confinamento dell'elettrone all'interno del sistema si considero un potenziale infinito così definito:

$$V_{edge}(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ \infty & \text{altrove} \end{cases}$$

Prima di affrontare il problema dell'elettrone in campo magnetico è fondamentale discutere il caso di un elettrone libero confinato con Hamiltoniana

$$H_0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} + V_{edge}(x)$$

Gli autostati risultano:

$$|\psi(x)\rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) & 0 < x < L \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (2.8)$$

con autovalori:

$$E_n^{(0)} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m_eL^2} = n^2E_1^{(0)}$$

L'insieme delle autofunzioni (2.8) che risolvono il problema di un elettrone libero costituiscono una base ortonormale completa. Un generico stato può dunque essere espresso come una combinazione lineare degli stati costituenti tale base:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\psi_n\rangle$$

È ora possibile affrontare il caso che include anche il campo magnetico ed elettrico esprimendo ancora un autostato di tale sistema come combinazione lineare delle soluzioni dell'elettrone libero:

$$H|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n H|\psi_n\rangle = E \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\psi_n\rangle$$

calcolando il prodotto interno con il bra $\langle\psi_m|$ si ottiene

$$H_{nm} = \langle\psi_m|H|\psi_n\rangle = \delta_{m,n}E_n^{(0)} + \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) V_{ext}(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

È facilmente calcolabile una soluzione analitica dell'elemento di matrice H_{nm} al variare di n ed m tenendo conto delle seguenti relazioni:

$$\langle\psi_m|\psi_n\rangle = \delta_{m,n}$$

$$\langle\psi_m|x|\psi_n\rangle = \begin{cases} \frac{L}{2} & m = n \\ \frac{4L}{\pi^2} \frac{m \cdot n}{(m^2 - n^2)^2} [(-1)^{n+m} - 1] & m \neq n \end{cases}$$

$$\langle\psi_m|x^2|\psi_n\rangle = \begin{cases} L^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right) & m = n \\ \frac{8L^2}{\pi^2} \frac{m \cdot n}{(m^2 - n^2)^2} (-1)^{n+m} & m \neq n \end{cases}$$

Risulta più interessante calcolare una grandezza adimensionale che descriva il comportamento del sistema in rapporto ad un oscillatore armonico rispetto agli elementi H_{nm} :

$$\mathbb{E} \equiv \frac{2H}{\hbar\omega}$$

$$\mathbb{E}_{nm} = \frac{2}{\hbar\omega} E_1^{(0)} n^2 + \frac{\pi^2}{12} \frac{\hbar}{E_1^{(0)}} \left[2 - \frac{3}{(n\pi)^2} - 6 \frac{x_0}{L} - 6 \left(\frac{x_0}{L}\right)^2 \right]$$

$$+ \frac{m}{\hbar\omega} \left(\frac{E}{B}\right)^2 - \frac{2eE}{\hbar\omega} x_0$$

$$\mathbb{E}_{nm} = \begin{cases} \frac{2}{\hbar\omega} E_1^{(0)} n^2 + \frac{m}{\hbar\omega} \left(\frac{E}{B}\right)^2 - \frac{2eE}{\hbar\omega} x_0 & m = n \\ \frac{\pi^2}{12} \frac{\hbar}{E_1^{(0)}} \left[2 - \frac{3}{(n\pi)^2} - 6 \frac{x_0}{L} - 6 \left(\frac{x_0}{L}\right)^2 \right] & \\ \frac{\hbar\omega}{E_1^{(0)}} \frac{4m \cdot n}{(m^2 - n^2)^2} \left[(-1)^{n+m} - \frac{x_0}{L} \left((-1)^{n+m} - 1 \right) \right] & m \neq n \end{cases}$$

dove il rapporto $\hbar\omega/E_1^{(0)}$ dipende solo dalle dimensioni del sistema e dalla lunghezza magnetica:

$$\frac{\hbar\omega}{E_1^{(0)}} = \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{L}{l_B} \right)^2$$

A questo punto è sufficiente ottenere gli autovettori della matrice \mathbb{E} calcolando gli elementi della matrice con le relazioni precedenti per ogni valore n m minori di un valore K fissato e diagonalizzando la matrice stessa [28].

Analogamente si calcola il valor medio della posizione

$$\langle \psi | x | \psi \rangle = \sum_{n,m}^{\infty} a_n a_m \langle \psi_m | x | \psi_n \rangle \quad (2.9)$$

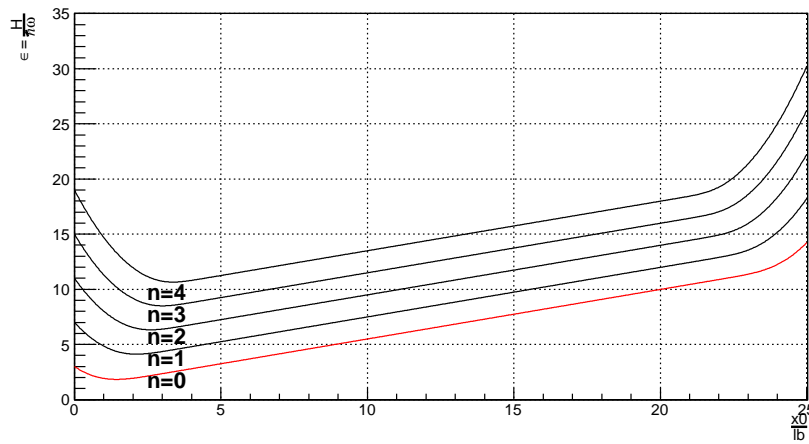
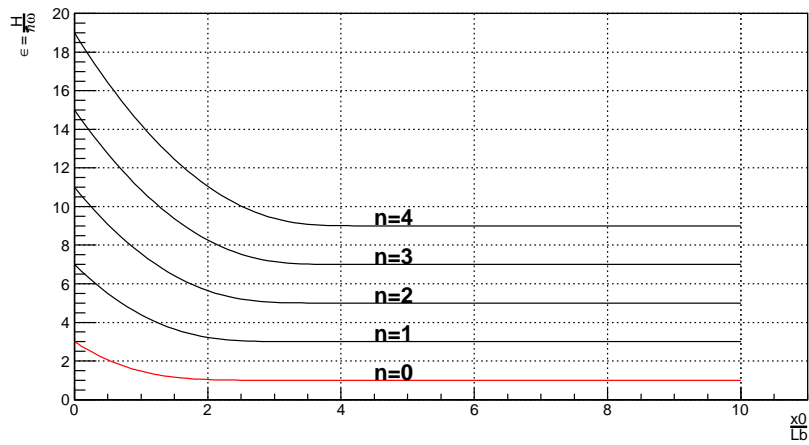


Figura 2.2: Livelli di Landau in funzione del parametro x_0 in assenza e in presenza del campo elettrico.

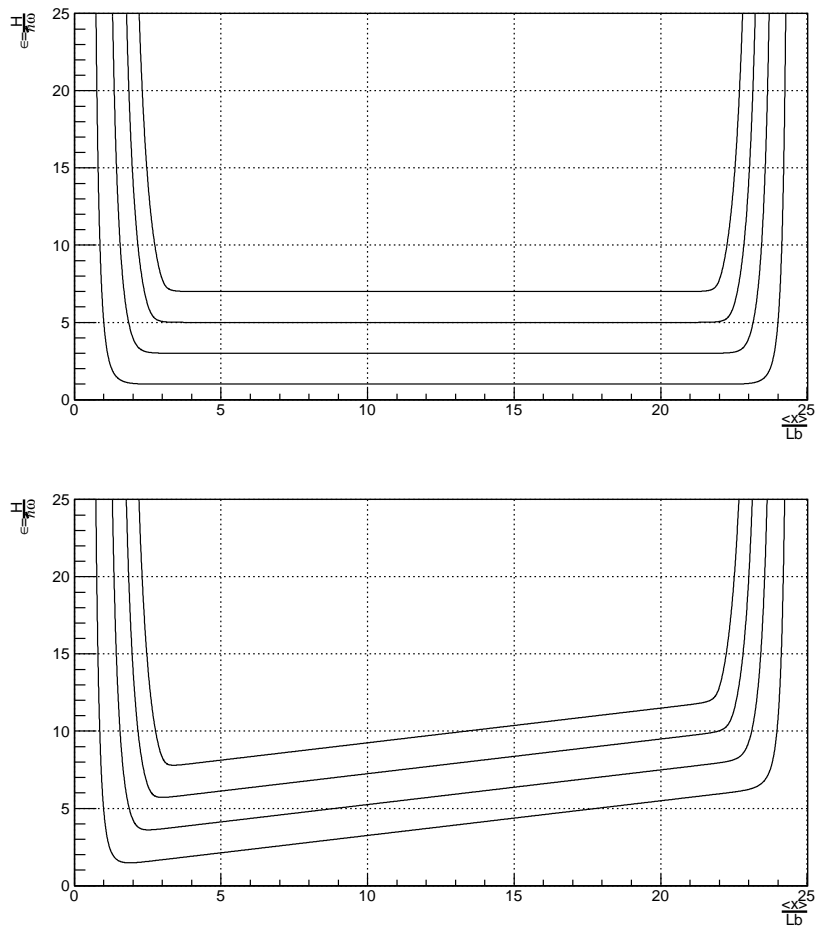
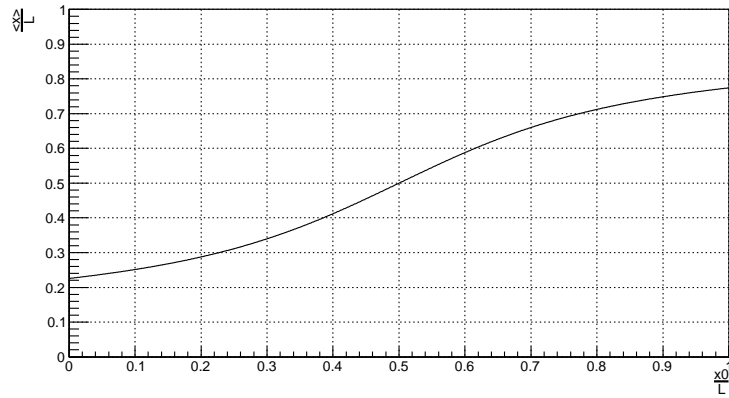
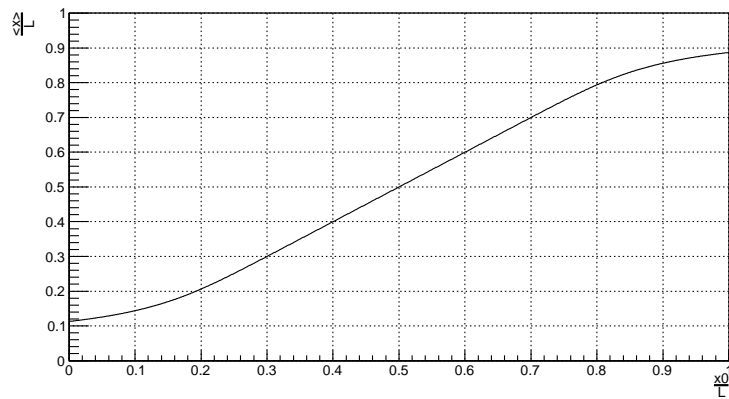


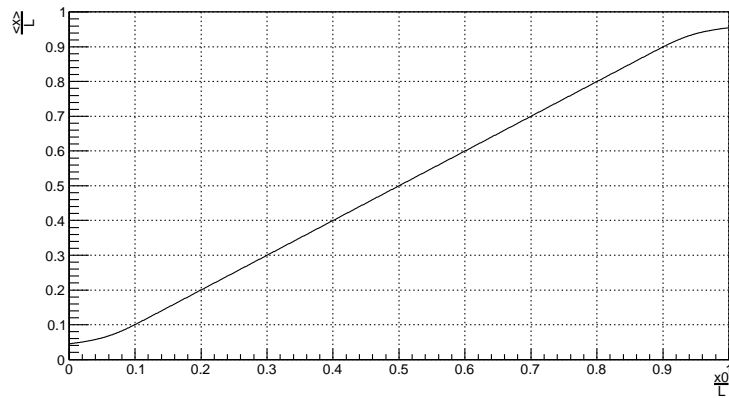
Figura 2.3: Livelli di Landau in funzione del valor medio della posizione in presenza e in assenza del campo magnetico.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.4: Andamento del valor medio della posizione al variare del parametro x_0 per tre valori di L : (a) $L = 5l_B$, (b) $10l_B$ e (c) $25l_B$

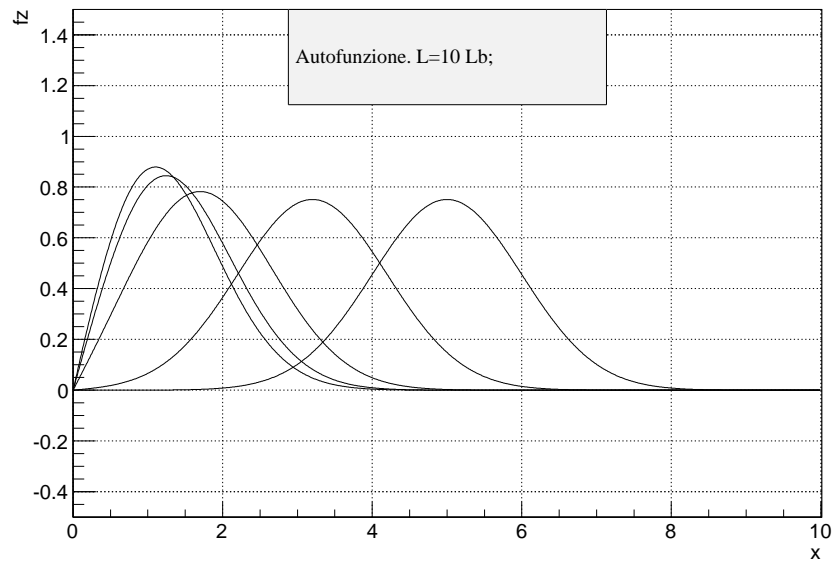


Figura 2.5: Autostato del livello fondamentale in funzione del parametro x_0 .

Capitolo 3

Effetto Hall quantistico intero

Per completare l'analisi dell'effetto Hall quantistico intero, in questo capitolo si procede allo studio dell'effetto del disordine sui livelli di Landau. La localizzazione di Anderson assume un ruolo fondamentale.

3.1 Localizzazione di Anderson

La localizzazione di Anderson permette di spiegare la presenza dei plateau della resistenza di Hall al crescere del campo magnetico.

Come analizzato nel capitolo precedente, in un sistema ideale lo spettro di un elettrone in moto in sistema 2-dimensionale in un campo magnetico perpendicolare al sistema stesso è costituito da una serie di livelli di Landau degeneri.

Un modello realistico deve includere lo scattering dovuto alle impurità e alle inhomogeneità del sistema reale in cui la degenerazione viene parzialmente rimossa e i livelli di Landau risultano allargati. Nel caso in cui il campo magnetico è abbastanza forte l'energia ciclotronica è maggiore dell'effetto del disordine e i livelli mantengono la loro identità.

Gli stati risultano quindi classificati in due categorie. Gli stati nelle code dei livelli di Landau sono Anderson-localizzati, ovvero sono intrappolati in una particolare regione microscopica del sistema. Invece gli stati vicini al centro di ogni livello di Landau sono estesi e attraversano tutto il sistema.

La distinzione è cruciale per l'andamento della conduttività poichè un campo elettrico esterno non può indurre una transizione tra diversi stati localizzati. Di conseguenza solo gli elettroni che occupano gli stati estesi contribuiscono al trasporto della corrente.

Per analizzare la localizzazione di Anderson è interessante analizzare il comportamento di in un sistema a temperatura zero al variare della densità di elettroni. Inizialmente, a bassa densità, tutti gli elettroni occupano stati localizzati e il trasporto risulta impossibile. Aggiungendo elettroni al sistema l'energia di Fermi, attraversando il primo livello di Landau possibile, raggiunge una regione di stati estesi e di conseguenza σ_{xy} aumenta di e^2/h . Un ulteriore incremento della densità di elettroni comporta che l'energia di Fermi raggiunge una regione

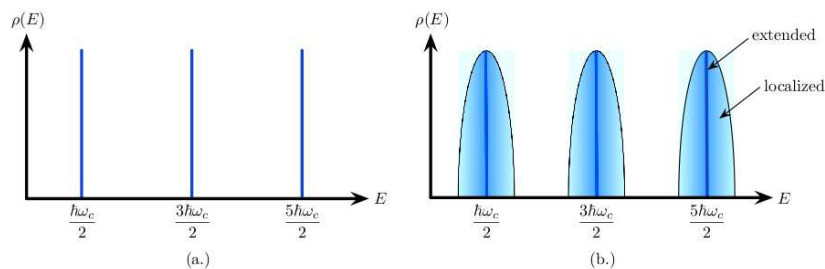


Figura 3.1: Densità di stati del sistema: differenza tra stati estesi e stati localizzati.

di stati localizzati nella coda superiore del livello di Landau. In tali condizioni un'ulteriore variazione della densità di elettroni non altera il numero di stati estesi occupati. Inoltre la conduttività di Hall mostra un plateau. Al crescere della densità, la sequenza è ripetuta e l'energia di Fermi, crescendo, attraversa i successivi livelli di Landau e mostra il comportamento appena descritto [16].

3.2 Teoria di Laughlin

È possibile dare una spiegazione della quantizzazione della resistenza di Hall attraverso la teoria proposta da Laughlin nel 1981 [1][17].

Si consideri una superficie 2-dimensionale piegata a formare un cilindro, di raggio R e lunghezza L , con gli elettrodi posizionati ai bordi del cilindro stesso. Un campo magnetico uniforme è applicato perpendicolarmente alla superficie cilindrica. Il sistema di riferimento del sistema è definito mediante le coordinate (x, y) , con la direzione x parallela all'asse del cilindro e l'asse y lungo la circonferenza.

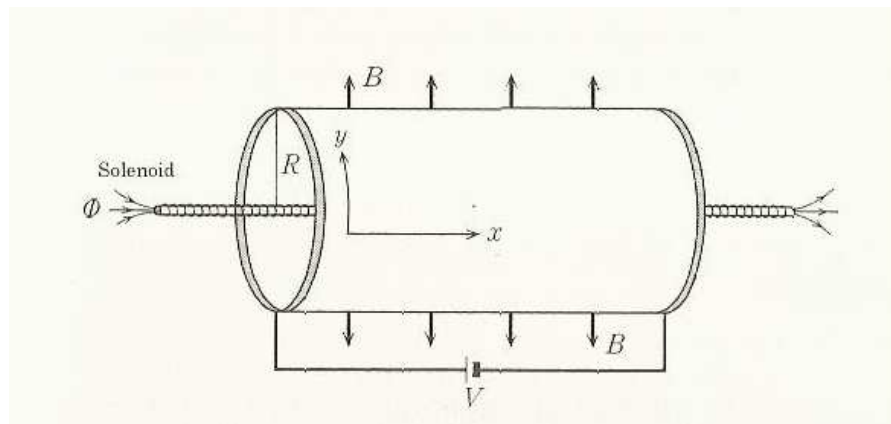


Figura 3.2: Sistema considerato da Laughlin.

Inoltre un solenoide è posizionato lungo l'asse del cilindro: genera un flusso Φ al proprio interno. La geometria della superficie cilindrica è fondamentale

per far uso del solenoide e spiegare l'argomento (risulta ugualmente adatta anche una superficie con la geometria di Corbino, un disco con al centro un foro, topologicamente equivalente al sistema studiato). Il campo magnetico del solenoide è presente solo all'interno del solenoide stesso e si annulla sulla superficie del cilindro. Invece il potenziale vettore di tale campo ha comunque un valore finito sulla superficie ed influisce sul moto degli elettroni: questo è l'effetto Aharonov-Bohm.

Per il potenziale vettore del campo perpendicolare al cilindro si considera la gauge di Landau: $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$. Invece il potenziale vettore generato dal solenoide sulla superficie del cilindro è $\mathbf{A}_\Phi = (0, -\Phi/2\pi R, 0)$. Quest'ultima relazione può essere facilmente dedotta:

$$\Phi = \int dS B_x = \int dS (\nabla \times \mathbf{A}_\Phi)_x = \oint \mathbf{A}_\Phi \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R |\mathbf{A}_\Phi|$$

Nel capitolo precedente è stata analizzata l'invarianza di gauge e in particolare l'indipendenza del campo magnetico dalla scelta di gauge: in modo analogo il campo magnetico che agisce sull'elettrone è indipendente da Φ .

Una variazione del potenziale vettore, dovuta ad una variazione di Φ è un tipo di trasformazione di gauge. Ovviamente la funzione d'onda cambia:

$$\phi(\mathbf{r}) \rightarrow \phi(\mathbf{r}) e^{ie\chi(\mathbf{r})/\hbar} \quad \chi(\mathbf{r}) = \frac{\Delta\Phi}{2\pi R} y$$

a causa della variazione del flusso magnetico:

$$\Phi \rightarrow \Phi + \Delta\Phi$$

In conclusione l'unica variazione connessa alla presenza del solenoide è solo la fase della funzione d'onda. Però per la geometria del sistema è fondamentale l'effetto Aharonov-Bohm: a causa delle condizioni al contorno da rispettare c'è la possibilità che la trasformazione di gauge non sia permessa. In base allo stato dell'elettrone ci sono due possibilità:

- È possibile che la regione dove la funzione d'onda $\chi(\mathbf{r})$ è finita avvolga il cilindro nella direzione y ovvero lo stato dell'elettrone è esteso nella direzione y : in questo caso la funzione d'onda deve soddisfare la condizione

$$\phi(x, y + 2\pi R) = \phi(x, y)$$

La trasformazione di gauge, implica che:

$$\begin{aligned} \phi(x, y + 2\pi R) e^{ie\chi(x, y + 2\pi R)/\hbar} &= \phi(x, y) e^{ie\chi(x, y + 2\pi R)/\hbar + ie\Delta/\hbar} \\ &= \phi(x, y) e^{ie\chi(x, y + 2\pi R)/\hbar} \end{aligned}$$

Di conseguenza perchè la trasformazione di gauge sia possibile, $\Delta\Phi$ deve soddisfare

$$\Delta\Phi = \frac{h}{e} \cdot n$$

dove n assume solo valori interi. In conclusione una trasformazione di gauge continua non è permessa.

- È inoltre possibile che la regione dove la funzione d'onda è finita non sia connessa nella direzione y , ovvero lo stato dell'elettrone è localizzato nella direzione y . In questo caso non è necessario imporre le condizioni al contorno: non si può seguire l'andamento della fase lungo la direzione y poichè la funzione d'onda si annulla e la memoria della fase è persa. In questo caso una trasformazione continua è permessa.

È necessario considerare anche il caso in cui una trasformazione di gauge non sia in grado di eliminare la variazione di Φ .

Prima di tutto si consideri uno sistema ideale privo di impurità: tutte le funzioni d'onda sono delocalizzate e rientrano nella prima categoria sopra esplicitata. Il potenziale vettore totale può essere scritto come

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}_\Phi = \left(0, Bx - \frac{\Phi}{2\pi R}, 0 \right)$$

L'effetto della variazione di flusso $\Delta\Phi$ è quindi equivalente ad una traslazione nella direzione x : nel caso ideale, tutte le funzioni d'onda degli elettroni sono traslate di $\Delta x = \Delta\Phi/2\pi RB$ quando il flusso dovuto al solenoide varia di $\Delta\Phi$. Per un sistema ideale le funzioni d'onda degli elettroni hanno una forma gaussiana nella direzione x con coordinata del centro X : un variazione $\Delta\Phi = h/e$, nel caso in cui una trasformazione di gauge è possibile, corrisponde ad una traslazione delle funzioni d'onda uguale alla separazione tra il centro delle coordinate di due stati successivi.

Ora si introducano gradualmente delle impurità nel potenziale.

Finchè l'effetto delle impurità è abbastanza piccolo, il comportamento del sistema non cambia: tutte le funzioni d'onda risultano delocalizzate e con una variazione del flusso del campo magnetico, ogni funzione d'onda risulta traslata nella direzione x . Quando $\Delta\Phi = h/e$ lo spostamento raggiunge il punto in cui ogni funzione d'onda è traslato nella posizione occupato all'origine dalla funzione d'onda successiva.

Aumentando l'effetto delle impurità, appaiono stati localizzati nella direzione y . Per questi stati localizzati la trasformazione di gauge diventa possibile e quindi tali stati non si muovono ma varia la fase. Gli stati estesi continuano a muoversi lungo la direzione x ; inoltre è possibile che quest'ultimi stati attraversino gli stati delocalizzati durante il loro moto.

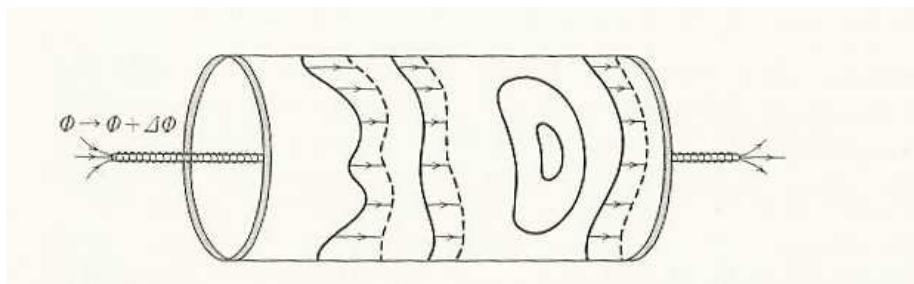


Figura 3.3: Trasporto delle funzioni d'onda al variare del flusso del solenoide.

In conclusione l'effetto di una variazione del flusso magnetico del solenoide è il trasporto degli stati estesi nella direzione parallela all'asse del cilindro.

È importante sempre uno stato esteso al centro di ogni livello di Landau.

Come già visto durante la breve analisi della localizzazione di Anderson, l'IQHE è osservato quando l'energia di Fermi si trova nella banda degli stati localizzati tra i livelli di Landau e tutti gli stati estesi con energia inferiore sono completamente occupati: di conseguenza il numero di elettroni N che fluiscono attraverso il cilindro è dato dal numero dei livelli di Landau al di sotto dell'energia di Fermi del sistema.

In presenza di un potenziale elettrostatico tra i due bordi del cilindro il sistema è percorso da corrente. Finché il sistema è in regime di Hall quantistico, la corrente scorre nella direzione y e produce un campo magnetico parallelo all'asse del cilindro. Il flusso magnetico del solenoide interagisce con questo campo magnetico e ne risulta modificato.

Il valore di aspettazione della corrente elettrica nella direzione y può essere facilmente dedotta:

$$\begin{aligned} i_y &= \left\langle \sum_i \frac{e}{m_e} [p_{iy} - eA_y(r_i)] \right\rangle / 2\pi RL \\ &= \frac{1}{L} \left\langle \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\sum_i \frac{1}{2m_e} [p_{ix}^2 + (p_{iy} - eA_y)^2] + V_{imp}(r_i) \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{L} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \Phi} \right\rangle = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \Phi} \langle E \rangle \end{aligned}$$

Per ottenere la seconda linea si usa il fatto che l'operatore corrente può essere ottenuto come la derivata dell'Hamiltoniana, che, in questo caso, include il potenziale dovuto alle impurità $\sum_i V_{imp}(x_i)$, rispetto al flusso del solenoide.

A questo punto è necessario supporre che la corrente appena calcolata sia indipendente dalle condizioni al contorno e quindi dal flusso Φ . È quindi possibile sostituire la derivata rispetto al flusso con la differenza di energia associata ad una differenza finita del flusso stesso: $\Delta\Phi = h/e$. Inoltre la variazione di energia di N elettroni nel potenziale elettrico precedente è $\Delta E = eVN$.

In conclusione

$$i_y = N \frac{e^2}{h} \frac{V}{L} = N \frac{e^2}{h} E$$

e la conduttanza di Hall è ottenuta:

$$\sigma_{xy} = -N \frac{e^2}{h}$$

È stato quindi dimostrato che quando tutti i livelli di Landau al di sotto dell'energia di Fermi sono completamente occupati la resistenza di Hall è quantizzata e indipendente dalla posizione dell'energia di Fermi stessa rispetto agli stati localizzati.

Capitolo 4

Variabili di Grassmann

In questo capitolo sono introdotte alcune proprietà relative alle variabili di Grassmann [18][19] e alla supersimmetria [23][24] che risulteranno utili per studiare il comportamento di un potenziale random. Storicamente, l'uso delle variabili anticommutanti è stato introdotto da Martin (1959) per lo studio dell'oscillatore fermionico [25] e l'integrazione rispetto ad esse da Berezin (1961). Questi lavori rappresentano i primi passi dello studio relativo alla supermatematica e della successiva applicazione alla teoria quantistica dei campi. L'analisi relativa alla supersimmetria, inizialmente marginale, diventa centrale dopo la pubblicazione di Parisi e Sourlas (1979). A loro si deve la scoperta di una simmetria nascosta in sistemi ferromagnetici con campo magnetico random connesso all'introduzione di un superspazio di variabili sia simmetriche sia antisimmetriche.

Per l'analisi presentata in questo capitolo si prende come riferimento il formalismo scelto da Berezin in "Introduction to superanalysis" [18].

4.1 Algebra

Definizione 1. Un'algebra \mathfrak{A} è uno spazio lineare sul campo \mathbb{K} in cui, oltre alle usuali operazioni addizioni e moltiplicazione per elemento appartenente all'insieme \mathbb{K} , è definito il prodotto di elementi con la solita proprietà distributiva:

$$a(\alpha b + \beta c) = \alpha ab + \beta ac$$

$$(\alpha a + \beta b)c = \alpha ac + \beta bc$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall a, b, c \in \mathfrak{A}$.

\mathbb{K} sarà sempre l'insieme dei numeri reali o complessi: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e l'algebra sarà dunque detta *reale* o *complessa*.

Un'algebra è *commutativa* se $ab = ba$ per ogni elemento a, b .

Un'algebra è *associativa* se per terna di suoi elementi a, b, c

$$a(bc) = (ab)c.$$

Sia \mathfrak{A} un'algebra e $\Sigma \subset \mathfrak{A}$ un suo sottoinsieme. Si denota con $\mathfrak{A}(\Sigma)$ una collezione di tutti i possibili polinomi degli elementi di Σ : $f \in \mathfrak{A}(\Sigma)$ se

$$f = f_0 + \sum_{k \geq 1} \sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1} \cdots a_{i_k}, a_i \in \Sigma, f_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{K}$$

(somma finita). $\mathfrak{A}(\Sigma)$ è una sottoalgebra di \mathfrak{A} , detta *sottoalgebra generata dall'insieme* Σ . Risulta evidente che $\mathfrak{A}(\Sigma)$ è contenuta in ogni algebra contenente l'insieme Σ .

Se $\mathfrak{A}(\Sigma) = \mathfrak{A}$, l'insieme Σ è detto *sistema dei generatori dell'algebra* \mathfrak{A} o *insieme generatore*.

Inoltre considero le algebra per le quali la nozione di convergenza di una successione di elementi è definita: queste algebra sono dette *algebra topologiche*. Per queste algebra introduco anche la nozione di sistema topologico di generatori. Un insieme $\Sigma \in \mathfrak{A}$ è detto un *insieme di generatori topologici* di \mathfrak{A} se \mathfrak{A} è la chiusura di $\mathfrak{A}(\Sigma)$.

4.2 Algebra di Grassmann

Definizione 2. Un'algebra associativa è detta *algebra di Grassmann* o *algebra esterna* se contiene un sistema di generatori ξ_i tali che

$$\{\xi_i, \xi_k\} = \xi_i \xi_k + \xi_k \xi_i = 0, \quad (4.1)$$

in particolare vale $\xi_i^2 = 0$. Ogni altra relazione riguardante ξ_i è una diretta conseguenza di (4.1). I generatori ξ_i che godono di questa proprietà sono detti *canonici*.

L'algebra di Grassmann è denotata da Λ e per indicare esplicitamente il sistema dei generatori canonici si scrive $\Lambda(\xi_1, \dots, \xi_q)$. Inoltre segue da (4.1) che ogni elemento appartenente a $\Lambda(\xi_1, \dots, \xi_q)$ è una combinazione lineare dell'unità e dei monomi $\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}$ tali che $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Dalle relazioni tra i ξ_i segue che questi monomi sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, insieme all'unità, formano una base di Λ_q in modo analogo ad uno spazio lineare. Poichè il loro numero è pari al dei sottoinsiemi di un insieme di q elementi, segue che $\dim \Lambda_q = 2^q$. Di conseguenza ogni sistema di generatori di Λ_q è costituito da q elementi. Non è necessario introdurre un simbolo speciale per l'unità di Λ_q perchè coincide con l'unità in \mathbb{K} .

4.3 Funzioni

Ogni elemento appartenente a $\Lambda(\xi_1, \dots, \xi_q)$ può essere scritto nella forma

$$f = f(\xi) = \sum_{k \geq 1} \sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1, \dots, i_k} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k} \quad (4.2)$$

Il termine corrispondente a $k = 0$ è proporzionale all'unità. La relazione $f = f(\xi)$ sottolinea il fatto che f è espressa nella forma di un polinomio in ξ_i . I polinomi $f = f(\xi)$ hanno diverse proprietà formali delle usuali funzioni e sono detti *funzioni delle variabili anticommutanti*. L'espressione (4.2) non è univoca in generale, è necessario imporre una condizione sui coefficienti f_{i_1, \dots, i_k} : devono essere anti-simmetrici rispetto agli indici i_1, \dots, i_k (ovvero f_{i_1, \dots, i_k} cambia segno scambiando due indici).

In particolare se considero l'algebra $\Lambda_1 = \Lambda(\xi)$, una funzione $f(\xi)$ dipende solo da una variabile di Grassmann e il suo sviluppo di Taylor (4.2) risulta:

$$f(\xi) = a + b\xi$$

Sia E un insieme arbitrario, Λ un'algebra di Grassmann sul campo \mathbb{K} e Λ^E un'algebra di tutte le funzioni definite su E a valori in Λ . Denoto con $\Lambda(E)$ la sottoalgebra di tutte le funzioni infinitamente differenziabili in E .

Sia ξ_i un sistema di generatori canonici di Λ . Ogni elemento $f \in \Lambda^E$ può essere scritta nella forma:

$$f = f(x, \xi) = \sum_{k \geq 1} \sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1, \dots, i_k}(x) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k} \quad (4.3)$$

dove $x \in E$ e f_{i_1, \dots, i_k} sono funzioni reali o complesse definite su E . Se $f \in \Lambda^E$ allora le f_{i_1, \dots, i_k} sono funzioni infinitamente differenziabili (come nel caso precedente devono essere antisimmetriche rispetto agli indici i_1, \dots, i_k).

La nozione di convergenza può essere naturalmente introdotta in $\Lambda(E)$: la successione $f_n \in \Lambda(E)$ converge a $f \in \Lambda(E)$ se per ogni elemento f_n della successione, tutte le funzioni-coefficienti f_{n, i_1, \dots, i_k} e tutte le loro derivate convergono uniformemente su ogni insieme compatto $F \subset E$. È facilmente osservabile che la convergenza non dipende dalla scelta del sistema di generatori canonici al contrario dei coefficienti f_{i_1, \dots, i_k} e f_{n, i_1, \dots, i_k} .

L'argomento ξ nell'espressione $f(x, \xi)$ di (4.3) indica esplicitamente il sistema di generatori ξ_k per rappresentare f .

Se $E \subset \mathbb{R}^p$ e $\Lambda = \Lambda_q$ ha q generatori canonici, userò una notazione più dettagliata, $\Lambda_{p,q}(E)$ o $\Lambda(E, x_1, \dots, x_p, \xi_1, \dots, \xi_q)$, dove x_i sono coordinate cartesiane in U e ξ_i i generatori dell'algebra Λ_q . Gli elementi $1, x_i, \xi_j, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$ formano un sistema di generatori topologici di $\Lambda(E)$.

4.3.1 Campo complesso

Sia Λ_{2q} un'algebra di Grassmann sul campo complesso \mathbb{C} : il sistema di generatori può essere suddiviso in due sottoinsiemi $\{\xi_i\}$ e $\{\bar{\xi}_i\}$ ($i = 1, \dots, q$). È possibile definire all'interno dell'algebra l'operazione di complesso coniugato:

$$\xi^\dagger = \bar{\xi}, \quad \bar{\xi}^\dagger = \xi$$

e, in particolare, vale

$$(\xi_1 \xi_2)^\dagger = \xi_1^\dagger \xi_2^\dagger$$

L'operatore complesso coniugato si applica anche ad ogni elemento dell'algebra e vale la relazione:

$$f^\dagger = \left[\sum_{k \geq 1} \sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1, \dots, i_k} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k} \right]^\dagger = \sum_{k \geq 1} \sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1, \dots, i_k}^* \xi_{i_k}^\dagger \cdots \xi_{i_1}^\dagger$$

4.4 Superanalisi

In questo paragrafo analizzo la teoria della differenziazione e integrazione degli elementi dell'algebra $\Lambda_{p,q}(U)$ [18].

4.4.1 Derivata

Sia $f(x, \xi) \in \Lambda_{p,q}(U)$ scritta nella forma (4.3) e siano x_i, ξ_j i generatori di $\Lambda_{p,q}(U)$. Definisco la derivata rispetto alle variabili commutanti:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right) (x, \xi) = \sum_{k \geq 1} \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial}{\partial x_i} f_{i_1, \dots, i_k}(x) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}$$

dove

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_{i_1, \dots, i_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_p)$$

è la derivata di $f_{i_1, \dots, i_k}(x)$ rispetto al suo i -esimo argomento.

Ora definisco le derivate rispetto alle variabili anticommutanti. Poichè le ξ_i anticommutano, la direzione in cui le derivate agiscono deve essere specificata.

Definisco la derivata sinistra:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k} = \delta_{i, i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} - \delta_{i, i_2} \xi_{i_1} \xi_{i_3} \cdots \xi_{i_k} + \cdots;$$

La derivata destra:

$$\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k} \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \delta_{i, i_k} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{k-1}} - \delta_{i, i_{k-1}} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{k-2}} \xi_{i_k} + \cdots.$$

In altre parole, se $i = i_s$ allora per calcolare la derivata sinistra si deve posizionare i_s all'estrema sinistra del prodotto $\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}$ applicando la relazione di commutazione (4.1) e quindi eliminarlo. Per la derivata destra si procede in modo analogo posizionando i_s all'estrema destra del prodotto per poi eliminarlo. Si può usare anche la notazione $\frac{\partial}{\partial \xi_i} \xrightarrow{\leftarrow} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$.

Le derivate rispetto a diverse variabili di Grassmann anticommutano:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial \xi_i} = 0 \quad (4.4)$$

che implica

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)^2 = 0$$

La relazione (4.4) è equivalente al fatto che ogni combinazione lineare di variabili anticommutanti ξ_i ha quadrato nullo: $(\sum_i^q \alpha_i \xi_i)^2 = 0$.

Inoltre è facilmente verificabile la relazione:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \xi_j + \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \delta_{i,j} \quad (4.5)$$

Quest'ultima osservazione permette di osservare una struttura di oscillatori fermionici definendo gli operatori di creazione e distruzione:

$$\begin{aligned} a_i^\dagger &\rightarrow \xi_i & a_i &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi_i} \\ \{a_i, a_j\} &= \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0 & \{a_i, a_j^\dagger\} &= \delta_{i,j} \end{aligned}$$

Dove $\{A, B\}$ è l'anticommutatore simmetrico $AB + BA$.

4.4.2 Integrale

Siano x_i, ξ_i i generatori dell'algebra $\Lambda_{p,q}(U)$. Considero una funzione $f(x, \xi) \in \Lambda_{p,q}(U)$. L'integrale rispetto alle variabili x_i si interpreta come l'usuale integrale.

Per analizzare l'integrale rispetto alle variabili di Grassmann, considero, senza perdere generalità, l'algebra $\Lambda_{0,q}(U)$ generata da sole variabili anticommutanti.

L'integrale rispetto alle variabili anticommutanti è definito, paradossalmente, come la derivata (sinistra):

$$\int d\xi_i f(\xi_1, \dots, \xi_q) = \frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi_1, \dots, \xi_q)$$

In particolare valgono le seguenti relazioni:

$$\int \xi_i d\xi_i = 1 \qquad \int d\xi_i = 0$$

Inoltre si può verificare che dalla proprietà di anticommutazione delle derivate si deduca l'ultima proprietà:

$$\begin{aligned} \{d\xi_i, d\xi_j\} &= 0 & \{\xi_i, d\xi_j\} &= 0 \\ \int d\xi_i d\xi_j &= - \int d\xi_j d\xi_i = \int d\xi_i \int d\xi_j \Rightarrow \int d\xi_i d\xi_j = 0 \end{aligned}$$

da cui segue immediatamente che $\int d\xi_k = 0 \forall k$.

Cambio di variabili

Analizzando il cambio di variabili all'interno dell'integrale appena definito si sottolinea la profonda differenza con l'integrazione delle variabili commutanti. Inizio, inizialmente, un'algebra monodimensionale $\Lambda_{0,1}$ generata da un'unica variabile anticommutante ξ .

Viste le proprietà dell'algebra di Grassmann finora descritte, la trasformazione avrà la forma:

$$\xi' = a\xi, \qquad a \neq 0$$

allora

$$\int d\xi f(\xi) = \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} = a \frac{\partial f\left(\frac{\xi'}{a}\right)}{\partial \xi'} = a \int d\xi' f\left(\frac{\xi'}{a}\right)$$

La relazione precedente è esattamente l'opposto di quello che avviene per le usuali variabili commutanti. Il Jacobiano per le variabili di Grassmann è l'inverso di quello che ci si aspetta per le variabili commutanti:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{a} \int f\left(\frac{x'}{a}\right) dx'$$

Considero ora il caso più generico dell'algebra $\Lambda_{0,q}(U)$. La trasformazione è:

$$\xi'_i = a_{i,j} \xi_j, \qquad \det a_{i,j} \neq 0$$

da cui:

$$\int d\xi_1 \cdots d\xi_k f(\xi_i) = \det a_{i,j} \int d\xi'_1 \cdots d\xi'_k f(a_{i,j}^{-1} \xi'_i) \quad (4.6)$$

Integrale Gaussiano

Sia $\Lambda_{0,2q}(\xi_1, \dots, \xi_q, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_q)$ un'algebra di Grassmann sul campo complesso \mathbb{C} . Valuto l'integrale gaussiano per le variabili di Grassmann [20]. Mi limito al caso di una matrice Hermitiana A $n \times n$.

$$I = \int \left(\prod_i^n d\bar{\xi}_i \cdot d\xi_i \right) e^{-[\sum_{i,j} \bar{\xi}_i A_{i,j} \xi_j]} = \det(A) \quad (4.7)$$

L'equazione (4.7) può essere dimostrata diagonalizzando la matrice A :

$$A = u^+ \hat{\lambda} u$$

dove $\hat{\lambda}$ è una matrice reale diagonale e u è una matrice unitaria. Operando un cambio di variabili $\theta_i = u_{i,j} \xi_j$, $\theta_i^+ = u_{i,j}^+ \xi_j^+$ e usando la relazione (4.6), si ottiene l'integrale:

$$I = \int \left(\prod_i^n d\bar{\theta}_i \cdot d\theta_i \right) e^{-[\sum_i \bar{\theta}_i \lambda_i \theta_i]} \quad (4.8)$$

dove λ_i sono gli elementi della matrice $\hat{\lambda}$. L'integrale nell'equazione (4.8) può quindi essere facilmente calcolato riscrivendo l'esponenziale della somma come prodotto degli esponenziali e integrando ogni elemento separatamente:

$$I = \prod_i^n \int d\bar{\theta}_i \cdot d\theta_i e^{-(\bar{\theta}_i \lambda_i \theta_i)} = \prod_i^n \int d\bar{\theta}_i \cdot d\theta_i (1 - \bar{\theta}_i \lambda_i \theta_i) = \prod_i^n \lambda_i \quad (4.9)$$

Dall'equazione (4.9) si ottiene immediatamente la relazione iniziale (4.7).

Il risultato è analogo al corrispondente integrale per le variabili ordinarie, eccetto per la potenza positiva del determinante. Questa fondamentale differenza è alla base del metodo supersimmetrico che verrà illustrato nel prossimo capitolo.

Si può generalizzare l'equazione (4.7) mediante un altro cambiamento di variabili: $\xi_i' = \xi_i + A_{i,j}^{-1} \eta_j$ ed ottenere:

$$\int \left(\prod_i^n d\xi_i^* \cdot d\xi_i \right) e^{-[\xi^+ A \xi - \xi^+ \eta - \eta^+ \xi]} = \det(A) e^{\eta^+ A^{-1} \eta}$$

Inoltre posso scrivere un'utile relazione:

$$I = \frac{\int (\prod_k^n d\xi_k^* \cdot d\xi_k) \xi_i \xi_j^* e^{-[\xi^+ A \xi]}}{\int (\prod_k^n d\xi_k^* \cdot d\xi_k) e^{-[\xi^+ A \xi]}} = (A^{-1})_{i,j}$$

4.5 Parisi-Sourlas

In questa sezione introduco alcune informazioni sul superspazio e sulle funzioni supersimmetriche [24]. Lo scopo principale è presentare il lemma dovuto a Parisi e Sourlas che permette una riduzione dimensionale nell'integrazione di funzioni supersimmetriche dovuta ad una simmetria nascosta.

Sia $\Lambda(\underline{x}, \theta, \bar{\theta})$ un'algebra di Grassmann e si definisca un superspazio con variabili $(\underline{x}, \theta, \bar{\theta})$ dove $\underline{x} \in \mathbb{R}^p$ e θ e $\bar{\theta}$ sono variabili anticommutanti.

Una trasformazione supersimmetrica è una rotazione nel superspazio che preserva la supermetrica $\underline{x}^2 + \theta\bar{\theta}$. Oltre alle usuali rotazioni in \mathbb{R}^p e alle trasformazioni simplettiche di θ e $\bar{\theta}$ include le trasformazioni del tipo:

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x} + 2\bar{b}\xi\theta + 2b\xi\bar{\theta} \quad (4.10)$$

$$\theta \rightarrow \theta + 4b\underline{x}\xi \quad (4.11)$$

$$\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} - 4\bar{b}\underline{x}\xi \quad (4.12)$$

dove $b, \bar{b} \in \mathbb{R}^p$ e ξ è una variabile anticommutante ($\xi^2 = \xi\theta + \theta\xi = \xi\bar{\theta} + \bar{\theta}\xi = 0$). Fissata ξ , denoto con $\tau(b, \bar{b})$ la trasformazione sopra descritta.

Fissata un'algebra di Grassmann $\Lambda_{p,2}(\underline{x}, \theta, \bar{\theta})$ si consideri una funzione $F \in \Lambda_{p,2}(\mathbb{R}^p)$, $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \Lambda_{p,2}$. Poichè la sottoalgebra Λ_2 , definita dalle variabili anticommutanti, è uno spazio vettoriale 4-dimensionale con base $1, \theta, \bar{\theta}$ e $\theta\bar{\theta}$, la funzione può essere riscritta come:

$$F(\underline{x}) = F_0(\underline{x}) + F_1(\underline{x})\theta + F_2(\underline{x})\bar{\theta} + F_3(\underline{x})\theta\bar{\theta}$$

dove $F_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}$ per $i = 0, 1, 2, 3$. Per enfatizzare che la funzione F è definita su un'algebra di Grassmann la si denota con $F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta})$.

Per descrivere l'effetto della trasformazione $\tau(b, \bar{b})$ si consideri un'ulteriore algebra di Grassmann $\Lambda_{p,3}(\underline{x}, \theta, \bar{\theta}, \xi)$. Si può definire una funzione $H : \mathbb{R}^p \rightarrow \Lambda_{p,3}$, scrivibile sempre come $H(\underline{x}) = F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta}) + G(\underline{x}, \theta, \bar{\theta})\xi$ in modo unico, dove $F, G : \mathbb{R}^p \rightarrow \Lambda_{p,2}$.

Si dice che $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \Lambda_{p,2}$ è di classe $C^{1,0}$ se F_0, F_1, F_2 sono di classe C^1 e F_3 di classe C^0 ; $H : \mathbb{R}^p \rightarrow \Lambda_{p,3}$ si dice di classe $C^{1,0}$ se lo sono F e G .

Definizione 3. $F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta})$ è *supersimmetrica* se è invariante per ogni trasformazione supersimmetrica.

Per dimostrare le condizioni per cui una funzione è supersimmetrica si studia l'effetto di una trasformazione supersimmetrica $\tau(b, \bar{b})$ agente su una funzione è definita da partendo da (4.10). Per una generica funzione $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}$ vale:

$$g(\underline{x} + 2\bar{b}\xi\theta + 2b\xi\bar{\theta}) = g(\underline{x}) + 2\nabla g(\underline{x}) \cdot (\bar{b}\xi\theta + b\xi\bar{\theta}) \quad (4.13)$$

Analogamente per una funzione $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \Lambda_2$, si applica l'equazione (4.13) a F_i , con $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} (\tau(b, \bar{b})F)(\underline{x}) &= F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta}) + 4\underline{x} [bF_1(\underline{x}) - \bar{b}F_2(\underline{x})] \xi \\ &\quad - 2\bar{b} [\nabla F_0(\underline{x}) - 2\underline{x}F_3(\underline{x})] \theta\xi - 2b [\nabla F_0(\underline{x}) - 2\underline{x}F_3(\underline{x})] \bar{\theta}\xi \\ &\quad + 2 [b\nabla F_1(\underline{x}) - \bar{b}\nabla F_2(\underline{x})] \theta\bar{\theta}\xi \end{aligned} \quad (4.14)$$

Proposizione 1. Sia $F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta})$ di classe $C^{1,0}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta})$ è supersimmetrica.
2. $F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta})$ è invariante ad ogni trasformazione supersimmetrica $\tau(b, \bar{b})$ $\forall b, \bar{b} \in \mathbb{R}^p$.
3. $F_1(\underline{x}) = F_2(\underline{x}) = 0$ e

$$\nabla F_0(\underline{x}) = 2\underline{x}F_3(\underline{x}). \quad (4.15)$$

4. Esiste una funzione $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^1 tale che

$$F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta}) = f(\underline{x}^2 + \bar{\theta}\theta) \equiv f(\underline{x}^2) + f'(\underline{x}^2) \bar{\theta}\theta$$

Dimostrazione:

(2) \Rightarrow (3): se vale (2), il termine proporzionale a ξ in (4.14) deve annullarsi per ogni $b, \bar{b} \in \mathbb{R}^p$, da cui immediatamente segue (3).

(3) \Rightarrow (4): Da (4.15) segue che $F_0(\underline{x})$ è una funzione che dipende solo dalla norma $\|\underline{x}\|$, quindi si può scrivere $F_0(\underline{x}) = f(\underline{x}^2)$ dove $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$. Poichè F_0 è di classe C^1 e F_3 di classe C^0 , da (4.15) si mostra che f è di classe C^1 e $F_3(\underline{x}) = f'(\underline{x}^2)$.

(1) \Rightarrow (2) e (4) \Rightarrow (1) sono ovvie. \square

Si consideri ora l'integrazione rispetto alle variabili del superspazio \underline{x} , θ e $\bar{\theta}$ e considero l'azione di una trasformazione supersimmetrica.

Proposizione 2. Se $F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta})$ di classe $C^{1,0}$ e τ è una trasformazione supersimmetrica, allora:

$$\int \tau F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta}) d\bar{\theta}d\theta d\underline{x} = \int F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta}) d\bar{\theta}d\theta d\underline{x}$$

Dimostrazione:

Si consideri la trasformazione supersimmetrica come (4.10). Allora

$$\int F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta}) d\bar{\theta}d\theta d\underline{x} = - \int F_3(\underline{x}) d\underline{x}$$

inoltre da (4.14)

$$\int \tau F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta}) d\bar{\theta}d\theta d\underline{x} = - \int F_3(\underline{x}) d\underline{x} - 2 \int [b\nabla F_1(\underline{x}) - \bar{b}\nabla F_2(\underline{x})] d\underline{x}\xi$$

Poichè F_i è di classe C^1 , F_i , ∇F_i sono integrabili, allora

$$\int \nabla F_i(\underline{x}) d\underline{x} = 0$$

per $i = 1, 2$. \square

Di seguito è enunciato il lemma dovuto a Parisi e Sourlas [23] che prova l'equivalenza di un sistema D -dimensionale in presenza di un campo esterno random con un sistema $(D - 2)$ -dimensionale senza il campo random.

Lemma 1. Parisi-Sourlas

Sia $F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta})$ una funzione supersimmetrica integrabile di classe $C^{1,0}$, dove $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$\int F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta}) d\bar{\theta}d\theta d\underline{x} = \pi F_0(0)$$

Dimostrazione:

Dall proposizione 1, $F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta}) = f(\underline{x}^2 + \bar{\theta}\theta)$ dove $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^1 . F è integrabile e $F_0(\underline{x}^2) = f(\underline{x}^2)$, si ha che $\lim_{\infty} f(t) = 0$. Allora

$$\begin{aligned} \int F(\underline{x}, \theta, \bar{\theta}) d\bar{\theta}d\theta d\underline{x} &= \int [f(\underline{x}^2) + f'(\underline{x}^2) \bar{\theta}\theta] d\bar{\theta}d\theta d\underline{x} \\ &= - \int f'(\underline{x}^2) d\underline{x} = -2\pi \int_0^\infty f'(r^2) r dr = \pi f(0) = \pi F_0(0) \square \end{aligned}$$

Osservazione:

Sia $\underline{x} = (u, v)$ dove $u \in \mathbb{R}^{D-k}$ e $v \in \mathbb{R}^k$. L'analisi precedente si applica anche a funzioni $F(u, v, \theta, \bar{\theta})$ che sono supersimmetriche rispetto alle variabili v , θ e $\bar{\theta}$. In particolare si può generalizzare il lemma 1: se $F(u, v, \theta, \bar{\theta})$ è supersimmetrica in v , θ e $\bar{\theta}$, allora $\nabla_v F_0(\underline{x}) = 2vF_3(\underline{x})$ ed esiste una funzione $f: \mathbb{R}^{D-k} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $F(u, v, \theta, \bar{\theta}) = f(u, v^2 + \bar{\theta}\theta)$.

In particolare è interessante il caso con $k = 2$, ovvero $\underline{x} = (x, y)$ dove $x \in \mathbb{R}^{D-2}$ e $y \in \mathbb{R}^2$. Sia $F(x, y, \theta, \bar{\theta})$ supersimmetrica rispetto alle variabili y , θ e $\bar{\theta}$, allora dal lemma precedente risulta:

$$\begin{aligned} \int F(x, y, \theta, \bar{\theta}) d\bar{\theta}d\theta dy dx &= \int f(x, y^2 + \theta, \bar{\theta}) d\bar{\theta}d\theta dy dx \\ &= \pi \int f(x, 0) dx = \pi \int F_0(x, 0) dx \end{aligned}$$

Capitolo 5

Disordine

In questo capitolo saranno studiati gli effetti delle impurità sui livelli di Landau. Analizzando la densità degli stati verrà mostrato come tale disordine si traduca in un allargamento dei livelli energetici. Il disordine comporta la rottura della degenerazione dei livelli di Landau e la formazione di bande. Un'analisi più approfondita mostra che i livelli delle bande corrispondono a stati localizzati che non contribuiscono al fenomeno della conduzione e sono alla base dell'interpretazione dell'IQHE.

Gli elettroni all'interno di un materiale reale interagiscono con le impurità inevitabilmente presenti e in definitiva possono essere descritti come particelle quantistiche in moto in un potenziale random. Il problema può essere schematizzato come un elettrone che obbedisce all'equazione di Schrödinger $H\phi = [-\nabla^2 + V(x)]\phi = E\phi$, dove $V(x)$ è il potenziale random con media nulla, $\langle V \rangle = 0$, e senza correlazione tra punti distinti, $\langle V(x)V(y) \rangle = k\delta(x-y)$, ovvero $p(V(x), V(y)) = p(V(x)) \cdot p(V(y))$.

Formalismo: si deve distinguere tra i valori di aspettazione quantistici, qui associati alle parentesi tonde, e medie sul disordine, denotate dalle usuali parentesi.

L'ipotesi sulle correlazioni si traduce nella relazione:

$$\left\langle e^{-i \int d^2 \underline{x} \alpha(\underline{x}) V(\underline{x})} \right\rangle = e^{\int d^2 \underline{x} g(\alpha(\underline{x}))} \quad (5.1)$$

dove g è la *funzione caratteristica* della distribuzione di probabilità e rappresenta la sua trasformata di Fourier

$$e^{g(\alpha)} = \int dV p(V) e^{-i\alpha V}$$

La relazione (5.1) è immediatamente dimostrabile approssimando il continuo ad un reticolo bidimensionale i cui siti sono indicizzati da i :

$$\begin{aligned} \left\langle e^{-i \sum_i^N \alpha_i V_i} \right\rangle &= \left\langle \prod_i^N e^{-i\alpha_i V_i} \right\rangle = \int p(V_1, \dots, V_N) dV_1 \cdots dV_N \prod_i^N e^{-i\alpha_i V_i} \\ &= \prod_i^N \int dV_i p(V) e^{-i\alpha_i V_i} = \prod_i^N e^{g(\alpha_i)} = e^{\sum_i^N g(\alpha_i)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.1 Funzione di Green

Data un'Hamiltoniana H , si definisce la funzione di Green (o risolvente) G :

$$G(z) = (z - H)^{-1} \quad (5.3)$$

dove z è una variabile nel piano complesso. Data una base $|E_n\rangle$ di autostati dell'Hamiltoniana:

$$H |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle$$

e la conseguente densità di stati:

$$\rho(E) = \sum_n \delta(E - E_n)$$

La rappresentazione spettrale del risolvente risulta:

$$\text{tr}G(z) = \text{tr} \left[\sum_n \frac{|E_n\rangle \langle E_n|}{z - E_n} \right] = \sum_n \frac{1}{z - E_n}$$

Risulta utile la seguente formula [26]:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right) \mp i\pi\delta(x)$$

ed in particolare:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \frac{1}{x + i\epsilon} = -\pi\delta(x)$$

Di conseguenza si ottiene, ponendo $z = E + i\epsilon$:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \text{tr}G(E + i\epsilon) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \sum_n \left[\frac{1}{E + i\epsilon - E_n} \right] \\ &= -\pi \sum_n \delta(E - E_n) = -\pi\rho(E) \end{aligned}$$

Infine si ottiene la media della densità spettrale per unità d'area usando la funzione di Green:

$$\rho(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\langle \left(\underline{x} \left| \frac{1}{E + i0 - H} \right| \underline{x} \right) \right\rangle$$

5.2 Denominatore

Per la teoria quantistica dei campi è valida la seguente relazione per ottenere una rappresentazione integrale per l'inverso di una matrice hermitiana:

$$(K^{-1})_{i,j} = \frac{\int \mathcal{D}(\varphi\bar{\varphi}) e^{-\bar{\varphi}K\varphi} \varphi_i \bar{\varphi}_j}{\int \mathcal{D}(\varphi\bar{\varphi}) e^{-\bar{\varphi}K\varphi}} \quad (5.4)$$

Sapendo come rappresentare un generico elemento di matrice $\frac{1}{z-H}$, per calcolare la densità di stati, è necessario calcolarne la traccia funzione di Green, ovvero posto $i = j$ in (5.4) e sommare sull'indice.

Il valore di aspettazione della funzione di Green risulta:

$$\left(\underline{x} \left| \frac{1}{E + i\epsilon - H} \right| \underline{x} \right) = \frac{1}{iZ} \int \mathcal{D}(\varphi \bar{\varphi}) \exp \left[i \int d^2 \underline{x} \bar{\varphi} (E + i\epsilon - H) \varphi \right] \varphi(\underline{x}) \bar{\varphi}(\underline{x}) \quad (5.5)$$

dove

$$Z = \int \mathcal{D}(\varphi \bar{\varphi}) \exp \left[i \int d^2 \underline{x} \bar{\varphi} (E + i\epsilon - H) \varphi \right]$$

L'integrazione è calcolata rispetto ad un campo scalare complesso su uno spazio 2-dimensionale con azione $S = \int d^2 \underline{x} \bar{\varphi} (E + i\epsilon - H) \varphi$.

D'ora in poi, pur ricordandone la presenza, l'infinitesima parte immaginaria di E non sarà più scritta esplicitamente.

Per calcolare la media rispetto al disordine di (5.5) è possibile utilizzare la replica trick (si veda per esempio [27]) ma di seguito verrà presentata una variante applicando una tecnica fermionica che risulta più soddisfacente da un punto di vista matematico.

5.3 Approccio fermionico

Le variabili di Grassmann presentate nel capitolo precedente sono alla base della tecnica fermionica che verrà esposta di seguito.

Si osserva che Z^{-1} è $\det(E - H)$ per mezzo di un path integral su un campo fermionico complesso ausiliare $(\psi \bar{\psi})$ introdotto opportunamente:

$$Z^{-1} = \det(E - H) = \int \mathcal{D}(\psi \bar{\psi}) \exp \left[i \int d^2 \underline{x} \bar{\psi} (E - H) \psi \right] \quad (5.6)$$

Riprendendo le relazioni precedenti (5.5) e (5.6) si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left(\underline{x} \left| \frac{1}{E - H} \right| \underline{x} \right) \\ &= -i \int \mathcal{D}(\varphi \bar{\varphi} \psi \bar{\psi}) \varphi(\underline{x}) \bar{\varphi}(\underline{x}) e^{i \int d^2 \underline{x} [\bar{\varphi}(E - H_0) \varphi + \bar{\psi}(E - H_0) \psi - V(\bar{\varphi} \varphi + \bar{\psi} \psi)]} \quad (5.7) \end{aligned}$$

Prima di calcolare la media rispetto al disordine è necessario introdurre l'ipotesi che il potenziale V sia tale da non provocare transizioni tra distinti livelli di Landau e inoltre che nell'equazione (5.7) solo il livello energetico corrispondente allo stato fondamentale contribuisce.

Quest'ipotesi si applica nell'integrazione rispetto a ψ e φ e si traduce nelle condizioni

$$(E - H_0) \psi = \mathcal{E} \psi \qquad (E - H_0) \varphi = \mathcal{E} \varphi$$

dove $\mathcal{E} = E - \frac{1}{2} \hbar$.

Considerando lo stato fondamentale $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{\frac{z^2}{4l^2}}$ (inserire riferimento alla soluzione calcolata in un capitolo precedente) si possono applicare le seguenti trasformazioni in (5.7):

$$\varphi = e^{-\frac{1}{2} z \bar{z}} u(z) \qquad \psi = e^{-\frac{1}{2} z \bar{z}} v(z)$$

dove u e v sono funzioni olomorfe in z (\bar{u} e \bar{v} sono antiolomorfe). Il Jacobiano della trasformazione è l'unità per tutti i livelli di Landau, con i contributi fermionici che compensano quelli bosonici. Ovviamente, coerentemente alla precedente ipotesi, si considera solo lo stato fondamentale.

$$\left\langle \left(x \left| \frac{1}{E-H} \right| x \right) \right\rangle = -ie^{-z\bar{z}} \int \mathcal{D}(u\bar{u}v\bar{v}) u(z) \bar{u}(z) \exp S$$

dove l'azione S risulta:

$$S = i \int d^2z \{ \mathcal{E} e^{-z\bar{z}} (\bar{u}u + \bar{v}v) - e^{-z\bar{z}} V (\bar{u}u + \bar{v}v) \}$$

Si procede dunque con l'integrazione sul disordine, utilizzando la relazione (5.1) e dove si è posto $\alpha(z) = (\bar{u}u + \bar{v}v) e^{-z\bar{z}}$

$$\left\langle \left(x \left| \frac{1}{E-H} \right| x' \right) \right\rangle = -ie^{-\frac{1}{2}(z\bar{z} + z'\bar{z}')} \int \mathcal{D}(u\bar{u}v\bar{v}) u(z) \bar{u}(z') \exp S$$

in particolare:

$$S = \int d^2z \{ i\mathcal{E} e^{-z\bar{z}} (\bar{u}u + \bar{v}v) + g (e^{-z\bar{z}} (\bar{u}u + \bar{v}v)) \}$$

S possiede una supersimmetria che risulta esplicita introducendo oltre alle variabili commutanti z, \bar{z} anche una coppia di variabili anticommutanti θ e $\bar{\theta}$. In questa sezione si normalizzano gli integrali in modo tale da mantenere una simmetria tra le due tipologie di variabili:

$$\int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta\bar{\theta}} = \frac{1}{\pi} \quad \int dz d\bar{z} e^{-z\bar{z}} = \pi$$

Si consideri quindi un supercampo $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_{2,2}$ definito come:

$$\Phi(z, \theta) = u(z) + \theta v(z) \quad \overline{\Phi(z, \theta)} = \overline{u(z)} + \overline{\theta} \overline{v(z)}$$

Allora l'azione S diventa:

$$S = i\pi\mathcal{E} \int d^2z d\theta d\bar{\theta} e^{-(z\bar{z} + \theta\bar{\theta})} \bar{\Phi}\Phi + \int d^2z g \left(e^{-z\bar{z}} \pi \int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta\bar{\theta}} \bar{\Phi}\Phi \right)$$

Dove si è stata utilizzata la seguente relazione:

$$(\bar{u}u + \bar{v}v) = \pi \int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta\bar{\theta}} \bar{\Phi}\Phi$$

L'equazione appena scritta è facilmente dimostrabile applicando la proprietà di anticommutazione delle variabili θ e $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned} \int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta\bar{\theta}} \bar{\Phi}\Phi &= \int d\theta d\bar{\theta} (1 - \theta\bar{\theta}) (\bar{u}u + \bar{u}\theta v + \bar{\theta}v u + \bar{\theta}\theta\bar{v}v) \\ &= \int d\theta d\bar{\theta} (1 - \theta\bar{\theta}) (\bar{u}u + \bar{\theta}\theta\bar{v}v) = - \int d\theta d\bar{\theta} (\theta\bar{\theta}\bar{u}u - \bar{\theta}\theta\bar{v}v) = \frac{1}{\pi} (\bar{u}u + \bar{v}v) \end{aligned}$$

Il primo termine dell'azione S è invariante rispetto a trasformazioni supersimmetriche $\tau(b, \bar{b})$ (4.10) nel superspazio che conservano la metrica $z^2 + \theta\bar{\theta}$. È necessario quindi dimostrare che anche il secondo termine è invariante.

Sia $g(\alpha)$ una funzione che ammette sviluppo in serie di potenze $g(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \alpha^n$. $g(0)$ si annulla come conseguenza della normalizzazione della distribuzione di potenziale. Se g non ammette sviluppo in serie di potenze si approssima con funzioni che godono di questa proprietà.

$$g\left(e^{-z\bar{z}}\pi \int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta\bar{\theta}} \bar{\Phi}\Phi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-nz\bar{z}} \left[\pi \int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta\bar{\theta}} \bar{\Phi}\Phi\right]^n$$

Inoltre vale la seguente identità:

$$\left[\pi \int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta\bar{\theta}} \bar{\Phi}\Phi\right]^n = \frac{\pi}{n} \int d\theta d\bar{\theta} e^{-n\theta\bar{\theta}} (\bar{\Phi}\Phi)^n$$

Si introduce ora una funzione $h(\alpha)$ così definita:

$$h(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n} \alpha^n = \int_0^\alpha \frac{d\beta}{\beta} g(\beta)$$

Infine si sostituiscono nelle condizioni precedenti:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-nz\bar{z}} \left[\pi \int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta\bar{\theta}} \bar{\Phi}\Phi\right]^n &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{\pi}{n} \int d\theta d\bar{\theta} e^{-n\theta\bar{\theta}} (\bar{\Phi}\Phi)^n \\ \pi \int d\theta d\bar{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{e^{-n(z\bar{z} + \theta\bar{\theta})}}{n} (\bar{\Phi}\Phi)^n &= \pi \int d\theta d\bar{\theta} h\left(e^{-(z\bar{z} + \theta\bar{\theta})} \bar{\Phi}\Phi\right) \end{aligned}$$

Sostituendo nell'azione si ottiene:

$$\begin{aligned} S &= i\pi\mathcal{E} \int d^2z d\theta d\bar{\theta} e^{-(z\bar{z} + \theta\bar{\theta})} \bar{\Phi}\Phi + \int d^2z g\left(e^{-z\bar{z}}\pi \int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta\bar{\theta}} \bar{\Phi}\Phi\right) \\ &= \pi \int d^2z d\theta d\bar{\theta} \left[i\mathcal{E} e^{-(z\bar{z} + \theta\bar{\theta})} \bar{\Phi}\Phi + h\left(e^{-(z\bar{z} + \theta\bar{\theta})} \bar{\Phi}\Phi\right) \right] \end{aligned}$$

che ora possiede un'evidente invarianza rotazionale nel superspazio. Questo punto è all'origine della semplificazione nella valutazione del path integral.

Parisi e Sourlas [24] hanno mostrato una connessione tra sistemi random e sistemi puri: un sistema D-dimensionale in presenza di impurità random è perturbativamente equivalente alla teoria quantistica dei campi in D-2 dimensioni. Questa equivalenza si traduce nell'equazione, discussa ampiamente nel precedente capitolo, che regola l'integrazione nel superspazio $(z, \theta, \bar{\theta})$ di una funzione supersimmetrica:

$$\int d^D \underline{x} d\theta d\bar{\theta} f(\underline{x}^2 + \theta\bar{\theta}) = \int d^{D-2} \underline{x} f(\underline{x}^2)$$

Applicando quest'ultima relazione all'azione S si ottiene:

$$S = \pi \{i\mathcal{E} e^{-z\bar{z}} \bar{u}u + h(e^{-z\bar{z}} \bar{u}u)\} = \pi \{i\mathcal{E} \bar{\varphi}\varphi + h(\bar{\varphi}\varphi)\}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{x}{E-H} \middle| \frac{x}{E-H} \right) \right\rangle &= \frac{\int d\varphi d\bar{\varphi} \varphi \bar{\varphi} e^{\pi \{i\mathcal{E}\bar{\varphi}\varphi + h(\bar{\varphi}\varphi)\}}}{\int d\varphi d\bar{\varphi} e^{\pi \{i\mathcal{E}\bar{\varphi}\varphi + h(\bar{\varphi}\varphi)\}}} \\ &= \frac{1}{i\pi} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \ln \int_0^\infty dt \exp \pi \{i\mathcal{E}t + h(t)\} \end{aligned}$$

In definitiva, la densità di stati per una generica distribuzione di potenziale risulta:

$$\rho(E) = \frac{1}{\pi^2} \text{Im} \frac{\partial}{\partial E} \ln \int_0^\infty dt \exp \pi \left\{ i \left(E - \frac{1}{2}\hbar \right) t + \int_0^t \frac{d\alpha}{\alpha} g(\alpha) \right\} \quad (5.8)$$

Di seguito sarà valutata l'espressione (5.8) per alcune distribuzioni notevoli.

Inoltre sarà inserito il fattore dimensionale $K = \frac{eB}{\hbar}$ che finora era posto uguale all'unità.

Distribuzione Gaussiana

Si consideri la funzione caratteristica della distribuzione gaussiana $g(\alpha) = -\frac{1}{2}\omega\alpha^2$ e si definisca $\nu = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega K^2}} (E - \frac{1}{2}\hbar\omega)$. Allora da (5.8) si ottiene:

$$\rho(E) = \frac{K}{\pi^2} \sqrt{\frac{2}{\omega}} \frac{e^{\nu^2}}{1 + \left(2\pi^{\frac{1}{2}} \int_0^\nu dx e^{x^2} \right)^2}$$

Il numero totale degli stati del sistema è $\int dE \rho(E) = \frac{K^2}{2\pi}$ e, per grandi E , $\rho(E)$ decresce come

$$\rho(E) \sim \frac{K}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\omega}} \nu^2 e^{-\nu^2} (1 + \mathcal{O}(\nu^2)) \quad E \rightarrow \infty$$

in accordo con l'approssimazione semiclassica. Inoltre al centro della banda, dove ($\nu \rightarrow 0$), si ha

$$\rho(E) \sim \frac{K}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\omega}} \left(1 + \left(1 - \frac{4}{\pi} \right) \nu^2 + \mathcal{O}(\nu^4) \right) \quad E \rightarrow \frac{\hbar\omega}{2}$$

mostrando, come previsto, una gaussiana, ma con larghezza maggiore.

Distribuzione di Poisson

Si consideri il modello poissiano corrispondente ad una distribuzione uniforme di impurità random. La densità di probabilità di trovare N impurità nei punti x_1, x_2, \dots, x_N , in un'area \mathcal{A} è

$$P(x_1, \dots, x_N) = e^{-\rho\mathcal{A}} \frac{\rho^N}{N!}$$

Il corrispondente potenziale di intensità λ è

$$V(x) = \lambda \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i)$$

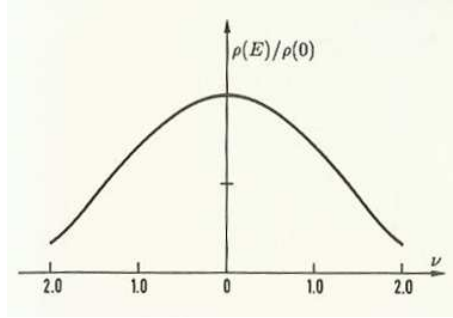


Figura 5.1: Densità di stati normalizzata nel caso gaussiano: $\frac{\rho(E)}{\rho(0)}$ in funzione di ν .

La funzione caratteristica risulta essere $g(\alpha) = \rho [e^{-i\lambda\alpha} - 1]$. Definite

$$\nu = \frac{2\pi}{\lambda K^2} \left(E - \frac{1}{2} \hbar\omega \right) \quad f = \frac{2\pi}{K^2} \rho \quad (5.9)$$

dove il rapporto adimensionale f è una misura della densità di impurità nell'area attraversata dall'unità del flusso magnetico. Allora: $\rho(E) = \frac{1}{\pi\lambda} \text{Im}F(\nu)$

$$F(\nu) = \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \left[\int_0^\infty dt e^{\{i\nu t - f \int_0^t \frac{d\alpha}{\alpha} (1 - e^{-i\alpha})\}} \right] \quad (5.10)$$

dove il parametro λ , che caratterizza il potenziale, è positivo.

Al variare del parametro f si osservano delle singolarità nell'integrale (5.10), come mostrato nei grafici in figura, dove è rappresentata la densità integrata $N(E)$ al variare del parametro stesso. Con $\nu \rightarrow 0$ si ottiene:

$$\lambda\rho(E) \sim \begin{cases} (1-f)\delta(\nu) + A(f)\nu^{-f} + \dots & 0 < f < 1 \\ \frac{1}{\nu \left[\left(\ln \frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 + \pi^2 \right]} + \dots & f = 1 \\ B(f)\nu^{2-f} & 1 < f < 2 \\ B(2) + \dots & f = 2 \\ B(f)\nu^{f-2} & f > 2 \end{cases}$$

Le costanti che appaiono nell'ultima relazione:

$$A(f) = \frac{f \sin \pi f}{\Gamma(1-f)} \int_0^\infty \frac{dt}{t^f} \exp - \left\{ t + f \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} e^{-\alpha} \right\} \quad 0 < f < 1$$

$$\ln \nu_0 = \int_0^\infty dt \exp - \left\{ \int_t^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} e^{-\alpha} + e^{-t} \right\}$$

$$\frac{1}{B(f)} = \Gamma(f-1) \int_0^\infty \frac{dt}{t^f} \exp - f \int_t^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} e^{-\alpha}$$

Il risultato più sorprendente è ottenuto nell'intervallo $0 < f < 1$ dove una frazione $(1-f)$ degli stati del livello di Landau più piccolo non sono influenzati dall'effetto del disordine.

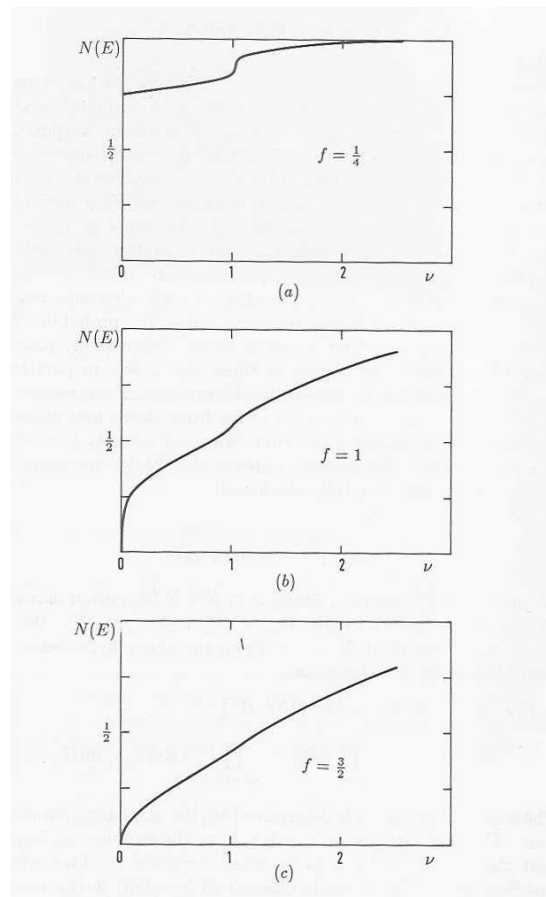


Figura 5.2: Densità di stati integrata per il modello di Poisson in funzione di ν , al variare del parametro f : (a) $f = \frac{1}{4}$, (b) $f = 1$, (c) $f = \frac{3}{2}$.

Distribuzione di Cauchy (o Lorentziana)

Si consideri ora una distribuzione di probabilità di Cauchy:

$$P(V) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{(V^2 + \lambda^2)}$$

con una funzione caratteristica $g(\alpha) = -\lambda|\alpha|$ non analitica. La densità di stati è nuovamente simile alla distribuzione $P(V)$:

$$\rho(E) = \frac{K^2}{2\pi^2} \frac{\lambda}{\left(E - \frac{1}{2}\hbar\omega\right)^2 + \lambda^2}$$

Confrontando (5.3) e (5.3) si osserva che le Lorentziane calcolate sono centrate sugli autovalori del modello privo di disordine: la differenza si manifesta nella larghezza della distribuzione. Questo dato spiega l'allargamento dei livelli di Landau con i conseguenti stati localizzati.

Appendice A

Integrali

In questa appendice sono calcolati esplicitamente alcuni integrali di cui sono state riportate solo le soluzioni.

Prima di tutta la formula generale è

$$\rho(E) = \frac{1}{\pi^2} \text{Im} \frac{\partial}{\partial E} \ln \int_0^\infty dt \exp \pi \left\{ i \left(E - \frac{1}{2} \hbar \right) t + \int_0^t \frac{d\alpha}{\alpha} g(\alpha) \right\} \quad (\text{A.1})$$

si procede quindi al calcolo applicato ai relativi casi analizzati nell'elaborato.

A.1 Distribuzione Gaussiana

Si inizia dunque al calcolo della funzione h :

$$h(\alpha) = \int_0^t \frac{d\alpha}{\alpha} g(\alpha) = - \int \frac{1}{2} \omega \alpha d\alpha = -\frac{1}{4} \alpha^2$$

L'integrale da calcolare è dunque:

$$I = \int_0^\infty dt e^{\pi \left\{ i \varepsilon t - \frac{1}{4} t^2 \right\}} = \frac{2e^{-\varepsilon^2 \frac{\pi}{\omega}}}{\sqrt{\omega \pi}} \int_0^\infty dx e^{-(x - i \varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{\omega}})^2}$$

Il risultato è ottenuto calcolando l'integrale sul rettangolo di vertici $(0, -\alpha)$, $(0, 0)$, $(R, 0)$ e $(R, -\alpha)$ nel piano complesso, tendendo R ad infinito.

$$\int_{\square} e^{-z^2} dz = 0$$

$$\int_{\square} e^{-z^2} dz = i \int_{-\alpha}^0 e^{-(iy)^2} dy + \int_0^R e^{x^2} dx - i \int_{-\alpha}^0 e^{-(R+iy)^2} dy - \int_0^R e^{-(x-i\alpha)^2} dx$$

Il secondo termine è l'integrale della gaussiana:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^R e^{x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Il terzo termine:

$$e^{-(R+iy)^2} \rightarrow 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^0 e^{-(R+iy)^2} dy = 0$$

Infine l'integrale da calcolare è:

$$\int_0^\infty e^{-(x-i\alpha)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + i \int_0^\alpha e^{y^2} dy$$

Sostituendo il risultato nell'integrale iniziale:

$$I = \frac{2e^{-\mathcal{E}^2 \frac{\pi}{\omega}}}{\sqrt{\omega\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + i \int_0^{\mathcal{E}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}} e^{y^2} dy \right]$$

Si procede dunque con il calcolo della derivata:

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \ln I = \frac{\mathcal{D}[I]}{I}$$

dove con $\mathcal{D}[I]$ si denota derivata rispetto a \mathcal{E}

$$\frac{\mathcal{D}[I]}{I} = -2\mathcal{E} \frac{\pi}{\omega} + \frac{2i}{I\omega}$$

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{E}) &= \frac{1}{\pi^2} \text{Im} \frac{\mathcal{D}[I]}{I} = \frac{1}{\pi^2} \text{Im} \frac{2i}{I\omega} = \frac{1}{\pi^2} \text{Im} \frac{2e^{-\mathcal{E}^2 \frac{\pi}{\omega}}}{\sqrt{\omega}} \frac{i + \frac{2}{\pi} \int_0^{\mathcal{E}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}} e^{y^2} dy}{1 + \left(2\pi^{\frac{1}{2}} \int_0^{\mathcal{E}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}} e^{y^2} dy \right)^2} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \frac{2}{\sqrt{\omega}} \frac{e^{-\mathcal{E}^2 \frac{\pi}{\omega}}}{1 + \left(2\pi^{\frac{1}{2}} \int_0^{\mathcal{E}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}} e^{y^2} dy \right)^2} \end{aligned}$$

A.2 Distribuzione di Cauchy (o Lorentziana)

$$g(\alpha) = -\lambda|\alpha|$$

$$h(t) = \int_0^t \frac{g(\alpha)}{\alpha} d\alpha = - \int_0^t \lambda d\alpha = -\lambda t \quad (\text{A.2})$$

$$\rho(\mathcal{E}) = \frac{1}{\pi^2} \text{Im} \int_0^\infty dt e^{\pi(i\mathcal{E}t - \lambda t)} = \rho(\mathcal{E}) = \frac{1}{\pi^2} \text{Im} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \ln \frac{1}{\pi(\lambda - i\mathcal{E})} \quad (\text{A.3})$$

con $\text{Re}\lambda + \text{Im}\mathcal{E} > 0$

$$\rho(\mathcal{E}) = -\frac{1}{\pi^2} \frac{\lambda}{(\lambda^2 + \mathcal{E}^2)} \quad (\text{A.4})$$

Bibliografia

- [1] D. Yoshioka, *The quantum Hall effect*, Springer (2002)
- [2] M.Goerbig, *Quantum Hall effects*, arXiv:0909.1998v2 (2009)
- [3] J.E. Avron, D. Osadchy, R. Seiler: *A Topological Look at the Quantum Hall Effect*, Physics Today 56,38 (2003)
- [4] G. S. Leadstone, *The discovery of the Hall effect*, Phys. Educ. 14, 374 (1979)
- [5] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, Phys. Rev. Lett. 45, 494 (1980)
- [6] T. Ando, Y. Matsumoto, Y. Uemura, *Theory of Hall effect in a two-dimensional electron system*, J. Phys. Soc. Japan 39, 280 (1975)
- [7] D.C. Tsui, H. Störmer, A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett. 48, 1559 (1983)
- [8] R. Laughlin, Phys. Rev. Lett. 50, 1395 (1983)
- [9] K. von Klitzing, *The quantized Hall effect*, Rev. Mod. Phys. 58, 519 (1986)
- [10] J.J. Sakurai, *Meccanica quantistica moderna*, Zanichelli (2009)
- [11] L.G. Molinari, *Electron in the strip with static $E - B$ field*, (2006)
- [12] J.L. Martin, S.A. Cruz, *On the harmonic oscillator inside an infinite potential well*, Am. J. Phys. 56, 1134 (1988)
- [13] F. Marsiglio, *The harmonic oscillator in quantum mechanics : A third way*, Am. J. Phys. 77, 253 (2009)
- [14] N.N. Lebedev, *Special functions and their applications*, Prentice-Hall, INC (1965)
- [15] J.T. Chalker, *The integer quantum Hall effect and Anderson localisation*
- [16] H. Aoki, T. Ando, *Effect of localization on the Hall conductivity in two-dimensional system in strong magnetic fields*, Solid State Commun. 38, 1079 (1981)
- [17] R. Laughlin, *Quantized Hall conductivity in two dimensions*, Phys. Rev. B 23, 5632 (1981)

- [18] F.A. Berezin, *Introduction to superanalysis*, (1987)
 - [19] F. Haake, *Quantum Signature of Chaos*, Springer (1991)
 - [20] C. Efetov, *Supersymmetry in Disorder Chaos*, Cambridge University Press (1997)
 - [21] C. Itzykson, J. M.Drouffe, *Statistical field theory*, Vol. 1, Cambridge University Press (1989)
 - [22] C. Itzykson, J. M.Drouffe, *Statistical field theory*, Vol. 2, Cambridge University Press (1989)
 - [23] G. Parisi, N. Sourlas, *Random magnetic fields, supersymmetry and negative dimensions*, Phys. Rev. Lett. 43, 744-745 (1979)
 - [24] A. Klein, L.J. Landau, J.F. Perez: *Supersymmetry and the Parisi – Sourlas dimensional reduction : A rigorous proof*, Commun. Math. Phys. 94, 459-482 (1984)
 - [25] J.L. Martin, *Generalized Classical Dynamics, and the 'Classical Analogue' of a Fermi Oscillator*, Proc. R. Soc. A 251, 536 (1959)
 - [26] I.M. Gel'Fand, G.E. Shilov, *Generalized functions*, Academic Press (1964)
 - [27] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*, University Press (2005)
 - [28] C. Sanderson, *Armadillo: An open source c++ linear algebra library for fast prototyping and computationally intensive experiments*, Technical Report, NICTA, 2010.
-