

Introduzione alla misura di Haar

Giovanni Stagnitto

7 marzo 2019

Sommario

Dopo aver introdotto il problema dell'invarianza della misura sotto opportune leggi di trasformazione, viene presentata la misura di Haar per generici gruppi topologici, e vengono richiamati alcuni concetti base della teoria della misura. Tale discorso viene poi rivisto per gruppi di Lie, alla luce della loro struttura differenziabile, e viene presentata la formula di integrazione di Weyl su gruppi compatti, prendendo come esempio notevole il caso $U(n)$ o $SU(n)$.¹

Una proprietà che risulta spesso gradita nell'ambito della teoria dell'integrazione è quella dell'invarianza sotto un particolare gruppo di trasformazioni e.g. il risultato dell'integrale multidimensionale in \mathbb{R}^n di una funzione invariante per traslazioni o rotazioni non cambia se traslo o ruoto la variabile di integrazione. Più in generale si può dimostrare che l'ordinaria misura di Lebesgue in n -dim è invariante per ogni isometria di \mathbb{R}^n , ovvero ogni trasformazione $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ del tipo $T(x) = Ax + b$, dove $A \in O(3)$ e $b \in \mathbb{R}^n$. Questo non è più vero in altri casi.

Consideriamo per esempio la sfera S^3 , che mediante proiezione stereografica può essere messa in relazione con il piano complesso $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \infty$. La misura canonica invariante per rotazioni sulla sfera, scritta in coordinate sferiche come $d\mu = \sin\vartheta d\vartheta d\phi$, trasportata nel piano complesso diventa $d\mu = (dzd\bar{z})/(1 + |z|^2)$, chiaramente non invariante per traslazioni. In modo analogo, se si considera la misura ordinaria di Lebesgue in \mathbb{C} data da $d\mu = dzd\bar{z}$, se trasportata sulla sfera dà luogo a una misura che rompe l'invarianza per rotazioni.

Nel caso di gruppi di Lie, varietà differenziabili che portano con sé una struttura di gruppo, o più in generale nel caso di gruppi topologici, sui quali può essere definito uno spazio di misura, sorge il problema di introdurre una misura di integrazione che risulti invariante sotto le corrispondenti trasformazioni del gruppo. Tale misura invariante viene chiamata *misura di Haar*.

Gruppi topologici Le trasformazioni di cui parliamo sono le seguenti. Dato un gruppo G e fissato un elemento $g \in G$, possiamo definire due trasformazioni che naturalmente

¹Molte dimostrazioni sono omesse e alcuni concetti sono forniti in modo sommario, cercando però di mantenere un sufficiente rigore matematico. È richiesta qualche nozione base di geometria differenziale.

emergono dalla legge di composizione interna del gruppo. La traslazione *sinistra*:

$$L_g : G \rightarrow G, \quad L_g(h) = gh \quad \forall h \in G \quad (1)$$

e la traslazione *destra*:

$$R_g : G \rightarrow G, \quad R_g(h) = hg^{-1} \quad \forall h \in G \quad (2)$$

Sono possibili anche definizioni alternative, senza elementi inversi. Il motivo per cui qui sono state definite in questo modo è per poter beneficiare di una semplice legge di composizione, che valga per entrambe le traslazioni:

$$L_a \circ L_b = L_{ab}, \quad R_a \circ R_b = R_{ab} \quad (3)$$

Definiamo anche il *coniugio* o *coniugato* che sarà importante in seguito:

$$C_g : G \rightarrow G, \quad C_g(h) = ghg^{-1} \quad \forall h \in G \quad (4)$$

ed è banale vedere come:

$$C_g = L_g \circ R_g = R_g \circ L_g \quad (5)$$

Un gruppo topologico consiste in un insieme G che sia contemporaneamente un gruppo astratto (con le leggi di trasformazione definite in precedenza) e uno spazio topologico (ovvero dotato di una topologia di insiemi detti *aperti*), e tale per cui le seguenti due mappe siano continue²:

$$f_1 : G \rightarrow G \quad f_1(x) = x^{-1} \quad x \in G \quad (6)$$

$$f_2 : G \times G \rightarrow G \quad f_2(x, y) = xy \quad x, y \in G \quad (7)$$

(spesso si richiede che la mappa $f : G \times G \rightarrow G$, $f(x, y) = xy^{-1}$ sia continua, il che equivale alla coppia di condizioni precedenti). Tale richiesta di continuità assicura che le due condizioni di gruppo astratto e spazio topologico siano compatibili i.e. le leggi di composizione del gruppo preservano la topologia degli aperti data³.

Introduciamo brevemente qualche concetto base di topologia che sarà utile in seguito:

- Spesso vengono considerati spazi topologici di Hausdorff, tali per cui vale l'*assioma di separazione*: per ogni coppia di punti distinti p e p' appartenenti allo spazio esistono due intorni $U \ni p$ e $U' \ni p'$ con intersezione nulla i.e. $U \cap U' = \emptyset$. Ciò esclude casi limite di topologie spiacevoli e assicura per esempio che ogni sequenza convergente abbia un limite unico.

²Una funzione $f : X \rightarrow Y$ tra spazi topologici (X, τ) e (Y, τ') è continua se $\forall U' \in \tau', f^{-1}(U') \in \tau$ i.e. la controimmagine di un aperto è aperta.

³Se G è un gruppo di Lie, si richiede che tale mappa sia di classe C^∞ , dal momento che in quel caso lo spazio topologico risulta dotato di una struttura differenziabile.

- Un concetto importante legato all'integrabilità è quello di *compattezza*, che si può esprimere in un generico spazio topologico di Hausdorff X nel seguente modo: per ogni collezione di insiemi aperti la cui unione copre X (*ricoprimento*) esiste una sottocollezione finita la cui unione copre X i.e. ogni ricoprimento aperto di X contiene un sottoricoprimento finito. In \mathbb{R}^n , per il teorema di Heine-Borel, recuperiamo la definizione alternativa di compatto come chiuso e limitato.
- Ai fini dell'integrazione però la proprietà rilevante è quella di *locale compattezza*, ovvero ogni punto dello spazio ha un intorno compatto. Tale proprietà è soddisfatta per tutti i gruppi matriciali di nostro interesse.
- Inoltre, uno spazio topologico si dice *connesso* se non può essere rappresentato come l'unione di due o più aperti non vuoti e disgiunti.

Non tutti i gruppi matriciali di nostro interesse sono però compatti. Per esempio il gruppo generale lineare $GL(n, \mathbb{R})$ di tutte le matrici $n \times n$ reali non-singolari non è compatto. Per vederlo basta considerare la mappa $\psi : x \mapsto \det x$ che è continua da $GL(n, \mathbb{R})$ (come spazio topologico omeomorfo a \mathbb{R}^{2n}) a \mathbb{R} . Pertanto $\psi^{-1}(\{0\})$ è chiuso in \mathbb{R}^{2n} (essendo $\{0\}$ chiuso in \mathbb{R}). Il complemento di $\psi^{-1}(\{0\})$, che è quindi aperto, è proprio $GL(n, \mathbb{R})$, il quale non può dunque essere compatto per Heine-Borel. Altri gruppi invece, come $O(n)$ o $U(n)$ sono compatti, dal momento che possiamo identificare i loro elementi come punti su una sfera, la quale è un insieme compatto.

Costruzione della misura di Haar Sia G uno spazio di Hausdorff localmente compatto. Sia $C_0(G)$ l'insieme di tutte le funzioni continue a supporto compatto in X . Sia Λ un funzionale lineare positivo su $C_0(G)$ i.e. una mappa $\Lambda : C_0(G) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che se $f(G) \subset [0, \infty)$ allora $\Lambda f \in [0, \infty)$. Il teorema di rappresentazione di Riesz (vedi per esempio [2]) afferma che esiste un'unica misura di Radon⁴ μ che *rappresenta* il funzionale, nel senso che:

$$\Lambda f = \int_G f d\mu \quad \forall f \in C_0(G) \quad (8)$$

Vale anche una sorta di teorema inverso, che fa corrispondere ad ogni misura di Radon un funzionale lineare positivo. In virtù di tale corrispondenza possiamo ragionare sia in termini di misure che in termini di funzionali.

Una volta definita l'azione della traslazione sinistra (1) su una funzione $f \in C_0(G)$ come:

$$T_g^L f(h) \doteq f(gh) \quad \forall h \in G \quad (9)$$

con abuso di notazione cerchiamo quindi una misura tale per cui valga:

$$\mu(T_g^L f) = \mu(f) \quad \forall f \in C_0(G) \quad (10)$$

⁴Una misura di Radon è una misura definita sugli insiemi di Borel di uno spazio topologico di Hausdorff, dotata di alcune proprietà di finitezza e regolarità che assicurino che la misura sia compatibile con la topologia dello spazio.

dove essa è intesa come funzionale, e tale per cui:

$$\mu(T_g^L X) = \mu(X) \quad \forall X \text{ misurabile } \subset G \quad (11)$$

dove essa è intesa come misura di Radon. Tale misura si chiama *misura di Haar sinistra*. In modo analogo, considerando la traslazione destra R_g definita in (1) al posto della traslazione sinistra L_g , si parlerà di *misura di Haar destra*.

Un risultato fondamentale è il seguente:

Teorema. *Ogni gruppo localmente compatto ammette, a meno di una costante moltiplicativa positiva, un'unica misura di Haar sinistra μ i.e. se esiste una seconda misura di Haar sinistra ν non-nulla, allora $\nu = c\mu$ con $c > 0$.*

Storicamente, tale scoperta è dovuta ad Alfred Haar, che nel 1933 dimostrò il risultato di esistenza, però solo in alcuni casi particolari. Von Neumann diede il suo contributo, dimostrandone l'unicità ed estendendo la prova ad altri casi. La prima dimostrazione nel caso più generale dell'esistenza e dell'unicità (a meno di una moltiplicazione) della misura di Haar sinistra si deve ad André Weil nel 1940. Poco dopo, Henri Cartan fornì un prova che evitava l'uso dell'assioma della scelta, e che stabiliva contemporaneamente l'unicità e l'esistenza.

Dando per valido l'enunciato del teorema, data una misura di Haar sinistra μ_{sx} , si può sempre costruire una misura di Haar destra μ_{dx} nel seguente modo:

$$\mu_{dx}(X) \doteq \mu_{sx}(X^{-1}) \quad (12)$$

Infatti:

$$\mu_{dx}(T_g^R X) \equiv \mu_{dx}(Xg^{-1}) = \mu_{sx}(gX^{-1}) = \mu_{sx}(X^{-1}) = \mu_{dx}(X) \quad (13)$$

Pertanto esiste ed è unica a meno di una costante moltiplicativa anche la misura di Haar destra. Possiamo domandarci ora se le due misure coincidano o meno.

Per vederlo, consideriamo un'altra misura di Haar, che costruiamo a partire da una misura di Haar sinistra μ data nel seguente modo:

$$\mu_g(f) \doteq \mu(T_g^R f) \quad (14)$$

Dal momento che la traslazione destra e sinistra commutano tra loro, troviamo che:

$$\mu_g(T_{g'}^L f) = \mu(T_g^R T_{g'}^L f) = \mu(T_{g'}^L T_g^R f) = \mu(T_g^R f) = \mu_g(f) \quad (15)$$

e quindi μ_g è sinistra. Il teorema di unicità implica che:

$$\mu_g = \Delta(g)\mu \quad (16)$$

La funzione $\Delta : G \rightarrow [0, \infty)$ è detta *funzione modulare* del gruppo G . Essa gode della proprietà, che può essere banalmente verificata:

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) \quad (17)$$

Dal momento che (16) può essere riscritta come:

$$\mu(T_g^R f) = \Delta(g)\mu(f) \quad \forall f \in C_0(G) \quad (18)$$

vediamo che se $\Delta(g) \equiv 1 \forall g \in G$ allora μ è anche destra, e quindi in questo caso la misura di Haar destra e sinistra coincidono e il gruppo G viene detto *unimodulare*.

Esempi importanti di gruppi unimodulari sono i gruppi abeliani (tali per cui $L_{g^{-1}} = R_g$ e quindi (18) esprime banalmente l'invarianza sinistra) e i gruppi compatti. Infatti la compattezza ci permette di dire che la funzione identità $\text{Id}(x) = 1$ per $x \in G$ appartiene a $C_0(G)$ e che quindi il valore di $\mu(\text{Id})$ è ben definito. Concludiamo quindi:

$$\Delta(y) = \Delta(y) \frac{\mu(\text{Id})}{\mu(\text{Id})} = \frac{\mu(R_y \text{Id})}{\mu(\text{Id})} = \frac{\mu(\text{Id})}{\mu(\text{Id})} = 1 \quad (19)$$

Esempi Un esempio semplice e interessante è dato dal gruppo G dei numeri reali non negativi, usando come operazione non l'addizione, ma la moltiplicazione. Mentre per l'addizione la misura di Haar coincide con la misura di Lebesgue, nel caso moltiplicativo la misura di Haar è data da:

$$d\mu(t) = dt/|t|, \quad t > 0 \quad (20)$$

Infatti:

$$d\mu(at) = d(at)/|at| = d\mu(t) \quad (21)$$

Un caso generale di (20) è costituito da \mathbb{R}^n con il gruppo generale lineare $GL(n, \mathbb{R})$. Possiamo scrivere la misura di Haar (destra e sinistra) come:

$$d\mu(x) = \frac{dx}{|\det x|^n}, \quad x \in GL(n, \mathbb{R}) \quad (22)$$

dove dx è l'ordinaria misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n i.e.:

$$dx = \prod_{i,j=1}^n dx_{ij} \quad (23)$$

Data la nota formula di cambiamento di variabili, l'espressione sopra è banalmente verificata, considerato per esempio che $d(Ax) = |\det A|^n dx$.

Proprietà di inversione della misura di Haar Data una misura di Haar sinistra μ e una funzione $f \in C_0$, e considerata la composizione di tale funzione con la legge di inversione del gruppo i.e. $\hat{f}(x) = f(x^{-1})$, allora vale che:

$$\mu(f) = \mu\left(\frac{\hat{f}}{\Delta}\right) \quad (24)$$

Nel caso particolare di gruppi unimodulari, tale formula si riduce a: $\mu(f) = \mu(\hat{f})$, il che sotto integrazione significa:

$$\int_G f(x) d\mu(x) = \int_G f(x^{-1}) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x^{-1}) \quad (25)$$

ovvero $d\mu(x) = d\mu(x^{-1})$. Nel caso della misura di Lebesgue, (24) si scrive come:

$$\int_S f(x)dx = \int_S f(x^{-1})\Delta(x)dx \quad (26)$$

Integrazione su manifold Nel caso di varietà differenziabili, come i gruppi di Lie, possiamo esplicitamente trovare una misura di Haar. Occorre però introdurre brevemente alcuni elementi di teoria dell'integrazione su manifold.

Innanzitutto occorre definire un'orientazione sul manifold. Dato uno spazio vettoriale reale, possiamo definire una relazione di equivalenza sulle basi ordinate di V , dichiarando due basi come equivalenti se il determinante della trasformazione che mappa l'una nell'altra è positivo. Quindi un'orientazione su V consiste nella scelta di una di queste due classi di equivalenza. Data l'identificazione degli spazi tangenti del manifold come spazi vettoriali, definiremo quindi il manifold come orientato se è data una scelta continua dell'orientazione su ogni spazio tangente. Ovvero, esprimendo lo stesso concetto nel linguaggio delle carte locali, si impone che la transizione da una carta locale all'altra avvenga tramite una trasformazione con determinante positivo.

Dando per scontato cosa si intenda per forme differenziali su un manifold, data una m -forma ω su un manifold M di dimensione m , è possibile dare senso a una scrittura del tipo:

$$\int_M f\omega \quad (27)$$

dove $f \in C_0(M)$, usando per esempio le carte locali e riconducendo l'integrale precedente a un integrale ordinario in \mathbb{R}^m . A tale proposito, per "trasportare" ω da M allo spazio euclideo, si usa il concetto di *pullback*, che sarà utile anche in seguito. Se $\Phi : M \rightarrow N$ è una funzione liscia tra due manifold, e ω è una k -forma liscia su N , allora il *pullback* $\Phi^*\omega$ è una k -forma su M data da:

$$(\Phi^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{\Phi(p)}(d\Phi_p(v_1), \dots, d\Phi_p(v_k)) \quad (28)$$

dove $v_1, \dots, v_r \in T_p(M)$ e $p \in M$, mentre $d\Phi_p$ è il differenziale di Φ in p e quindi $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$.

Se consideriamo la mappa $f \mapsto \int_M f\omega$ come funzionale lineare in $C_0(M)$ e usiamo le forme ω positive i.e. tali per cui $f \geq 0$ implica $\int_M f\omega \geq 0$, allora possiamo usare anche in questo caso il teorema di rappresentazione di Riesz per scrivere:

$$\int_M f\omega = \int_M f(x)d\mu_\omega(x) \quad \forall f \in C_0(M) \quad (29)$$

Si può dimostrare che se un manifold m -dimensionale ammette una m -forma ω ovunque non nulla, allora:

- M può essere orientata tale che ω sia positiva;
- se M è orientata e connessa, allora è positiva una tra ω e $-\omega$.

Inoltre vale il seguente risultato: se M e N sono manifold orientati di dimensione m , e $\varphi : M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo che preserva l'orientazione (i.e. $d\varphi : TM \rightarrow TN$ ha determinante positivo) allora per ogni m -forma su N vale:

$$\int_N f\omega = \int_M (f \circ \varphi)\varphi^*\omega \quad \forall f \in C_0(N) \quad (30)$$

Rappresentazione aggiunta Richiamiamo anche brevemente alcuni elementi di teoria dei gruppi di Lie. La trasformazione coniugata del gruppo (4) è un isomorfismo del gruppo in se stesso. Il corrispondente isomorfismo tra algebre di Lie $dC_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ è denotato come $\text{Ad}(g)$ e si può dimostrare come la mappa $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ sia un omomorfismo, che ad ogni elemento del gruppo associa una trasformazione lineare invertibile di \mathfrak{g} in se stesso. Il differenziale di Ad è proprio $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ dato da $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$. $\text{End}(\mathfrak{g})$, ovvero l'insieme delle mappe lineari di \mathfrak{g} in se stesso, è stato identificato con l'algebra di Lie di $GL(\mathfrak{g})$.

Misura di Haar su gruppi di Lie Siamo ora nelle condizioni di costruire esplicitamente una misura di Haar su un gruppo di Lie. Data la traslazione sinistra (1) e una generica r -forma ω , viene naturale considerare il *pullback* di ω lungo L_g , ossia la definizione (28) con $\Phi \equiv L_g$, quindi esplicitamente:

$$(L_g^*\omega)_p(v_1, \dots, v_r) = \omega_{L_{gp}}(dL_{g,p}(v_1), \dots, dL_{g,p}(v_r)) \quad (31)$$

dove $v_1, \dots, v_r \in T_pG$ e $p \in G$. Dichiareremo una forma come *invariante a sinistra* nel caso in cui valga $L_g^*\omega = \omega$ per ogni $g \in G$.

Sia data una forma k -lineare alternante $\alpha_e : (\mathfrak{g})^k \rightarrow \mathbb{R}$, dove \mathfrak{g} è l'algebra di Lie di G , spazio vettoriale di dimensione k (ricordiamo che esiste un isomorfismo tra \mathfrak{g} e T_eG , lo spazio tangente all'elemento identità e del gruppo). Tale applicazione esiste ed è unica a meno di una costante moltiplicativa. A partire da α costruiamo una k -forma su G , usando la traslazione sinistra per definire una famiglia di funzionali α_g i.e. $\alpha : G \rightarrow \sqcup_p \Lambda^k(T_p^*G)$ tale che $\alpha(g) = \alpha_g \in \Lambda^k(T_g^*G)$. Definiamo $\alpha_g : (T_gG)^k \rightarrow \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$\alpha_g(Y_1, \dots, Y_k) = \alpha_e(dL_{g^{-1},g}(Y_1), \dots, dL_{g^{-1},g}(Y_k)) \quad (32)$$

dove $Y_1, \dots, Y_k \in T_gG$. In pratica usiamo la traslazione sinistra per trasportare α_e in ogni altro punto di G . È immediato verificare come la forma definita sia invariante a sinistra:

$$(L_g^*\alpha)_p(v_1, \dots, v_r) = \alpha_{L_{gp}}(dL_{g,p}(v_1), \dots, dL_{g,p}(v_r)) \quad (33)$$

$$= \alpha_e(dL_{(gp)^{-1},gp}dL_{g,p}(v_1), \dots, dL_{(gp)^{-1},gp}dL_{g,p}(v_r)) \quad (34)$$

$$= \alpha_e(dL_{p^{-1},p}(v_1), \dots, dL_{p^{-1},p}(v_r)) \quad (35)$$

$$= \alpha_p(v_1, \dots, v_r) \quad (36)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che ciascun argomento di α_e , essendo elemento di \mathfrak{g} , sia un campo vettoriale invariante sinistro e quindi valga $dL_{(gp)^{-1},gp} \circ dL_{g,p}(v_i) = dL_{g,p}(v_i) \circ L_{(gp)^{-1}} = dL_{p^{-1},p}(v_i)$. In modo analogo dichiariamo una forma come *invariante a destra*

se vale $R_g^*\omega = \omega$ per ogni $g \in G$, e si può dimostrare con passaggi simili come costruire una forma di volume invariante a destra.

Alla luce di quanto detto nel paragrafo prima, data una forma di volume ω invariante a sinistra, è possibile orientare G tale che ω sia positiva e quindi costruire una misura di Borel $d\mu_l$ corrispondente che *invariante a sinistra* nel senso ordinario:

$$d\mu_l(L_g E) = d\mu_l(E) \quad \forall \text{ Borel set } E \in G \quad (37)$$

Nel caso di gruppi di Lie, è inoltre possibile trovare un'espressione esplicita per la funzione modulare del gruppo. Data una forma μ invariante a sinistra, scriviamo l'espressione del pullback di μ lungo R_g secondo (31):

$$(R_g^*\mu)_p(v_1, \dots, v_r) = \mu_{R_g p}(dR_{g,p}(v_1), \dots, dR_{g,p}(v_r)) \quad (38)$$

Usando (5), se scriviamo $R_g = C_g \circ L_{g^{-1}}$, sfruttando il noto fatto che se $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ e $T: V \rightarrow V$ è una mappa lineare, allora:

$$\omega(Tv_1, \dots, Tv_n) = (\det T) \omega(v_1, \dots, v_n) \quad (39)$$

possiamo scrivere:

$$(R_g^*\mu)(v_1, \dots, v_r) = (\det dC_g) \mu(dL_{g^{-1}}(v_1), \dots, dL_{g^{-1}}(v_r)) \quad (40)$$

dove abbiamo ommesso per semplicità la dipendenza da G . Siccome μ è invariante a sinistra, otteniamo:

$$R_g^*\mu = (\det dC_g)\mu = (\det \text{Ad}(g))\mu \quad (41)$$

Quando il determinante è positivo, usando (30), abbiamo:

$$(\det \text{Ad}(g)) \int_G f \mu = \int_G f R_g^*\mu = \int_G (f \circ R_g) \mu \quad (42)$$

$$= \int_G f(xg^{-1}) d\mu(x) = \int_G f(y) d\mu(yg) = \Delta(g) \int_G f \mu \quad (43)$$

dove abbiamo usato (18). Se invece $(\det \text{Ad}(g))$ è negativo, allora ogni passaggio è valido ma nella formula (30) ci vuole un segno meno. Concludiamo quindi:

$$\Delta(g) \equiv |\det \text{Ad}(g)| \quad (44)$$

Formula di integrazione di Weyl Per introdurre la formula di integrazione di Weyl abbiamo bisogno del concetto di *toro*. Un toro di dimensione n è un gruppo isomorfo a prodotto di n copie di $S^1 \simeq U(1)$. Si può dimostrare che ogni gruppo di Lie compatto, connesso e commutativo è un toro. Dato un gruppo compatto K , chiameremo poi *toro massimale* ogni sottogruppo T di K che sia un toro e che non sia contenuto in nessun altro toro.

Per esempio, se $K = U(n)$, un toro massimale è dato da:

$$T = \text{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_n}), \quad \theta_i \in \mathbb{R} \forall i \quad (45)$$

ed ha dimensione n . Invece se $K = SU(n)$, occorre soddisfare l'ulteriore condizione:

$$\sum_i \theta_i = 0 \pmod{2\pi} \rightarrow \theta_n = -(\theta_1 + \cdots + \theta_{n-1}) \quad (46)$$

e pertanto il toro massimale ha dimensione $n - 1$.

Un risultato importante (*torus theorem*) è il seguente:

Teorema. *Se K è un gruppo di Lie compatto e connesso, allora:*

1. *tutti i suoi tori massimali sono coniugati, ovvero esiste $x \in K$ tale che $T = xSx^{-1}$ per T e S tori massimali;*
2. *ogni elemento di K è contenuto in un toro massimale;*
3. *dato un toro massimale T , ogni $y \in K$ può essere scritto nella forma $y = xtx^{-1}$ per qualche $x \in K$ e $t \in T$.*

L'ultimo risultato, nel caso in cui $K = U(n)$, equivale semplicemente a dire che ogni matrice unitaria può essere diagonalizzata mediante matrici unitarie.

Teorema. *Sia K un gruppo di Lie connesso e compatto e T un suo toro massimale. Allora se $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua, vale:*

$$\int_K f(x)dx = \frac{1}{k} \int_T \left(\int_{K/T} f(yty^{-1})d[y] \right) \rho(t)dt \quad (47)$$

dove dx , $d[y]$ e dt sono le forme di volume normalizzate e invarianti a sinistra su K , K/T e T rispettivamente, e k e $\rho(t)$ verranno specificati in seguito. In particolare se vale che $f(yxy^{-1}) = f(x)$ per ogni $x, y \in K$, allora la formula (47) può essere semplificata come:

$$\int_K f(x)dx = \frac{1}{k} \int_T \rho(t)f(t)dt \quad (48)$$

Per arrivare a scrivere un'espressione per la funzione ρ dobbiamo decomporre \mathfrak{k} , algebra di Lie di K , come la somma diretta di \mathfrak{t} , algebra di Lie di T , e del suo complemento ortogonale \mathfrak{t}^\perp rispetto a un prodotto interno che sia invariante sotto l'azione aggiunta di \mathfrak{t} , ovvero tale per cui valga:

$$\langle \text{ad}_X(Y), Z \rangle = -\langle Y, \text{ad}_X(Z) \rangle \quad (49)$$

per ogni $X \in \mathfrak{t}$ e per ogni $Y, Z \in \mathfrak{k}$. Detto questo, ρ è data da:

$$\rho(t) = \det(\text{Ad}_t^{\mathfrak{t}^\perp} - I) \quad (50)$$

Abbiamo identificato gli spazi tangenti a $T \times (K/T)$ e a K con $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}^\perp = \mathfrak{k}$. La mappa $\text{Ad}_t^{\mathfrak{t}^\perp}$ indica la restrizione di Ad_t a \mathfrak{t}^\perp .

La dimostrazione si può trovare in [3] o in [4]. Qui ne diamo solo un accenno. Se X e Y sono due varietà differenziabili chiuse (ossia compatte, connesse e senza bordo) e

orientate e $\varphi : X \rightarrow Y$ è una mappa liscia, allora per ogni n -forma su Y vale il seguente risultato:

$$\int_X \varphi^*(\alpha) = k \int_Y \alpha \quad (51)$$

dove φ^* è il pullback di φ , mentre k è il cosiddetto *mapping degree* di φ , un fattore necessario per garantire la compatibilità tra le orientazioni sui due manifold. Tale formula può essere vista come un caso particolare di (30).

La formula (47) discende da (51) se consideriamo φ come:

$$\varphi : T \times K/T \rightarrow K, \quad \varphi(t, [x]) = txt^{-1} \quad (52)$$

e se dimostriamo che:

$$\varphi^*(f(x)dx) = (f \circ \varphi)\varphi^*(dx) = (f \circ \varphi)(t, [y])\rho(t)d[y]dt \quad (53)$$

Così facendo si trova che lo jacobiano della trasformazione $\rho(t)$ è dato dal determinante del differenziale di φ , che con un calcolo esplicito si vede essere uguale a (50). Più sottile invece è dimostrare che, dati K e T come nel teorema, esista una forma di volume indotta su K/T che sia invariante sotto l'azione sinistra di K .

Nel caso in cui $K = U(n)$, il terzo punto del torus theorem equivale a dire che la funzione φ è suriettiva. In questo caso il mapping degree di φ è dato dal numero di matrici diagonali della forma (45) che siano coniugate a una matrice unitaria data U . Se gli autovalori di U sono distinti, ciò significa che la matrice diagonale è determinata a meno di permutazioni degli stessi, ossia sotto φ la matrice unitaria U avrà $n!$ preimmagini.

Nel caso di $U(n)$ è anche possibile dare una formula esplicita per $\rho(t)$, che possiamo notare essere niente altro che il polinomio caratteristico di $\text{Ad}_{t^{-1}}^{\mathfrak{t}}$.

Innanzitutto nell'algebra di Lie di $U(n)$, ovvero $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) | X + X^* = 0\}$, identifichiamo il sottospazio ortogonale a $\mathfrak{t} = \{\text{diag}(i\theta_i) | \theta_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$ secondo il prodotto interno di Hilbert-Schmidt:

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^*B) \quad (54)$$

Si può facilmente vedere come esso soddisfi alla condizione (49).

Se chiamiamo e_{jk} una generica matrice con 1 nella posizione (j, k) con $j \neq k$ e 0 altrove, vediamo che essa appartiene a \mathfrak{t}^\perp . La sua parentesi di Lie con $h \in \mathfrak{t}$ è data da:

$$[h, e_{jk}] = i(\theta_j - \theta_k)e_{jk} \quad (55)$$

Questo mostra come $\text{ad}_h = i(\theta_j - \theta_k)$. Sfruttando il fatto che:

$$\text{Ad}_{e^X}(Y) = e^{\text{ad}_X}(Y) \quad (56)$$

abbiamo:

$$\text{Ad}_t(e_{jk}) = \text{Ad}_{e^h}(e_{jk}) = e^{\text{ad}_h}(e_{jk}) = e^{i(\theta_j - \theta_k)}(e_{jk}) \quad (57)$$

Quindi $e^{i(\theta_j - \theta_k)}$ sono gli autovalori di Ad_t quando esso agisce su \mathfrak{t}^\perp e quindi:

$$\rho(t) = \left| \prod_{j \neq k} (1 - e^{i(\theta_j - \theta_k)}) \right| = \prod_{j < k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 \quad (58)$$

Per esempio nel caso di $SU(2)$ si ha:

$$\rho(t) = |e^{i\theta} - e^{-i\theta}|^2 = 4 \sin^2 \theta \quad (59)$$

e la formula di integrazione di Weyl (48) diventa:

$$\int_{SU(2)} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(\text{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})) 4 \sin^2 \theta \frac{d\theta}{2\pi} \quad (60)$$

dove si è sfruttato il fatto che la misura di Haar per il gruppo $U(1)$ può essere scritta come $d\theta/2\pi$ in modo che $\mu(S^1) = 1$. Infine, in (60) il fattore k è dato dalla dimensione del gruppo delle permutazioni di 2 oggetti, ovvero $k = 2$.

Riferimenti bibliografici

- [1] A. O. Barut and R. Raczka, *Theory Of Group Representations And Applications*, World Scientific (1986)
- [2] W. Rudin, *Real And Complex Analysis*, McGraw-Hill (1987)
- [3] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, Springer (2010)
- [4] A. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, Progress in Mathematics (1996)