INTRODUZIONE AGLI STATI COERENTI

Luca Molinari

§1. Introduzione.

Gli stati a minima indeterminazione nella posizione X e nel momento P, per i quali la relazione di Heisenberg vale come uguaglianza, $\Delta X\,\Delta P = \hbar/2$, risultano essere autovettori dell'operatore

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\lambda}\hat{X} + i\frac{\lambda}{\hbar}\hat{P}\right)$$

dove λ è un arbitrario numero reale positivo. Nella base di $\hat{X}$ o di $\hat{P}$, essi sono rappresentati da stati Gaussiani.

L'operatore $\hat{a}$ e il suo aggiunto $\hat{a}^\dagger$ permettono una trattazione algebrica astratta dell'oscillatore armonico che ha una rilevante applicazione nella descrizione di seconda quantizzazione di sistemi quantistici a molte particelle identiche, di spin intero, e nella teoria quantistica dei campi.

Gli autostati dell'operatore $\hat{a}$ sono anche noti col nome di stati coerenti. Essi hanno svariate applicazioni, dai fondamenti della meccanica quantistica, alla risoluzione di alcuni problemi con potenziali dipendenti dal tempo, la dinamica in campi magnetici, l'ottica quantistica, la fisica dello stato solido e altro ancora.

La particolarità degli stati coerenti di possedere incertezza minima, e di costituire una base di stati localizzati in posizione e momento, li rende una base privilegiata per una ambientazione nello spazio delle fasi della dinamica quantistica .

Vi sono pertanto numerose ragioni per uno studio delle proprietà degli stati coerenti, a partire dalle proprietà algebriche degli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$.

Inizieremo con lo studio di una singola coppia di operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$. Essi sono definiti dalla regola di commutazione

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{I} \tag{1.1}$$

soddisfatta su un comune dominio $\mathcal{D}$, invariante per l'azione dei due operatori, e denso in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. E' utile richiedere che i due operatori formino una coppia irriducibile, cioè non esistano in $\mathcal{H}$ sottoinsiemi invarianti per gli operatori la cui chiusura sia contenuta propriamente in $\mathcal{H}$.

§2. L'operatore Numero.

Oltre ai due citati operatori si costruisce su $\mathcal{D}$ l'<u>operatore numero</u> $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$. Esso è positivo: per ogni elemento nel dominio $\langle\psi|\hat{N}\psi\rangle = ||\hat{a}\psi||^2 \geq 0$. In particolare, se ψ è un autovettore con autovalore μ, risulta $\mu \geq 0$. Valgono le seguenti regole di commutazione:

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad , \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \tag{2.1}$$

Supponiamo che $\hat{N}$ abbia un autovalore μ, con autovettore normalizzato che in notazione di Dirac rappresentiamo col simbolo $|\mu\rangle$; pertanto: $\hat{N}|\mu\rangle = \mu|\mu\rangle$. Le relazioni (2.1) implicano che i vettori $\hat{a}|\mu\rangle$ e $\hat{a}^\dagger|\mu\rangle$ sono autovettori di $\hat{N}$ rispettivamente con autovalori $\mu-1$ e $\mu+1$:

$$\hat{N}\hat{a}|\mu\rangle = \hat{a}(\hat{N} - \hat{I})|\mu\rangle = (\mu - 1)\hat{a}|\mu\rangle$$

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|\mu\rangle = \hat{a}^\dagger(\hat{N}+\hat{I})|\mu\rangle = (\mu+1)\hat{a}^\dagger|\mu\rangle$$

I due autovettori non sono normalizzati; le norme al quadrato sono rispettivamente: $\|\hat{a}|\mu\rangle\|^2 = \langle\mu|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\mu\rangle = \mu$ e $\|\hat{a}^\dagger|\mu\rangle\|^2 = \langle\mu|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\mu\rangle = \langle\mu|\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{I}|\mu\rangle = \mu+1$. Indichiamo con $|\mu\pm 1\rangle$ gli autovettori normalizzati:

$$|\mu-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\hat{a}|\mu\rangle, \quad |\mu+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu+1}}\hat{a}^\dagger|\mu\rangle$$

Queste proprietà giustificano la denominazione di $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ come operatori di abbassamento ed innalzamento. Nel contesto della teoria di II quantizzazione, essi sono noti come operatori di distruzione e creazione. Osserviamo che se l'autovalore μ fosse diverso da $n = 0, 1, 2\ldots$, la successiva applicazione di $\hat{a}$ allo stato iniziale $|\mu\rangle$ produrrebbe, ad un certa potenza, un autostato di $\hat{N}$ con autovalore negativo. Viceversa, per $\mu = m$, intero positivo, l'applicazione iterata dell'operatore di abbassamento produce in ultimo un autovettore $|0\rangle$ con la proprietà

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \tag{2.2}$$

Si conclude che l'operatore $\hat{N}$ ha per autovalori tutti gli interi non negativi; esso è pertanto noto come "operatore numero":

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad , \quad n = 0, 1, 2\ldots \tag{2.3}$$

L'azione degli operatori di abbassamento e di innalzamento sugli autovettori di $\hat{N}$ è la seguente:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad , \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{2.4}$$

Come conseguenza, gli autovettori $|n\rangle$ possono essere generati a partire dallo stato fondamentale $|0\rangle$, detto anche "stato di vuoto", mediante l'applicazione di potenze dell'operatore di innalzamento:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \tag{2.5}$$

La varietà lineare generata dagli stati $|n\rangle$ è invariante per l'applicazione degli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$; per l'ipotesi di irriducibilità, la sua chiusura deve coincidere con l'intero spazio di Hilbert. Gli stati $|n\rangle$ $n = 0, 1, , \ldots$ formano dunque un sistema ortonormale e completo in $\mathcal{H}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = \hat{I} \quad , \quad \langle n|m\rangle = \delta_{n,m} \tag{2.6}$$

Dalla discussione precedente risulta che la proprietà di irriducibilità corrisponde all'esistenza di un unico stato di vuoto.

L'estensione a più coppie commutanti di operatori $\hat{a}_i$, $\hat{a}_i^\dagger$, $i = 1\ldots m$,

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \hat{I}\delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \tag{2.7}$$

su uno spazio di Hilbert sul quale i $2m$ operatori costituiscano un insieme irriducibile, è immediata. Il vuoto comune $|\Phi\rangle$ è definito dalle relazioni $\hat{a}_i|\Phi\rangle = 0\ \forall i$. Gli autostati comuni agli operatori commutanti $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$

$$\hat{N}_i|n_1, n_2, \ldots n_m\rangle = n_i|n_1, n_2, \ldots n_m\rangle$$

sono generati a partire dallo stato di vuoto mediante l'applicazione di potenze degli m operatori di creazione

$$|n_1, n_2 \ldots n_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \ldots n_m!}} (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \ldots (\hat{a}_m^\dagger)^{n_m} |\Phi\rangle \tag{2.8}$$

e sono una base ortonormale per lo spazio di Hilbert:

$$\sum_{n_1, \ldots n_m} |n_1, n_2 \ldots n_m\rangle\langle n_1, n_2 \ldots n_m| = \hat{I}$$

$$\langle n_1, n_2 \ldots n_m | n'_1, n'_2 \ldots n'_m\rangle = \delta_{n_1, n'_1} \delta_{n_2, n'_2} \ldots \delta_{n_m, n'_m} \tag{2.9}$$

§3. Gli Stati Coerenti.

Oltre alla base $|n\rangle$ dell'operatore numero, è possibile introdurre una base di autovettori dell'operatore di abbassamento, noti come "stati coerenti", con proprieta' assai interessanti. Mostriamo esplicitamente che per ogni numero complesso z, l'equazione agli autovalori

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle \tag{3.1}$$

ha soluzione in $\mathcal{H}$. Essa viene ricercata attraverso il suo sviluppo nella base dell'operatore numero: $|z\rangle = \sum c_n |n\rangle$. Per la (3.1) i coefficienti soddisfano la relazione di ricorrenza $c_{n+1}\sqrt{n+1} = z c_n$, con soluzione $c_n = c_0 z^n/\sqrt{n!}$. I coefficienti definiscono certamente un elemento in $\mathcal{H}$ dal momento che $\sum_n |c_n|^2 = |c_0|^2 \exp|z|^2$. Lo stato coerente normalizzato ha pertanto lo sviluppo:

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{3.2}$$

Due stati coerenti non sono mai ortogonali e hanno prodotto interno

$$\langle z|w\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2} - \frac{|w|^2}{2} + z^* w\right) \tag{3.3}$$

che, in modulo, decade esponenzialmente con $|z - w|$. Questa circostanza, ed il fatto che gli stati coerenti siano un insieme continuo di vettori nello spazio di Hilbert, rende poco sorprendente la seguente relazione di "ultra-completezza"

$$\frac{1}{\pi} \int d^2z |z\rangle\langle z| = \hat{I} \tag{3.4}$$

dove $d^2z = d(Re\, z)d(Im\, z)$. Infatti, per ogni coppia $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, sviluppati nella base $|n\rangle$ dell'operatore numero, si ha

$$\frac{1}{\pi}\int d^2z\langle\psi_1|z\rangle\langle z|\psi_2\rangle = \sum_{n,m}\langle\psi_1|n\rangle\langle m|\psi_2\rangle I_{n,m} = \langle\psi_1|\psi_2\rangle \tag{3.5}$$

dove l'integrale

$$I_{n,m} = \frac{1}{\pi\sqrt{n!m!}}\int d^2z e^{-|z^2|}z^{*n}z^m = \delta_{nm} \tag{3.6}$$

è facilmente calcolabile in coordinate polari. L'ultracompletezza sta a significare che la base degli stati coerenti è ridondante. Essa è continua, ma due stati coerenti con parametri z_1 e z_2 sono praticamente ortogonali allorchè $|z_1 - z_2| \gg 1$. Una base di stati strettamente ortogonali sarebbe numerabile. Si dimostra che è possibile estrarre dall'insieme continuo di stati coerenti dei sottoinsiemi numerabili $\{z_{nm}\}$, che formano un reticolo in C e costituiscono ancora una base completa.

Lo stato fondamentale $|0\rangle$ dell'operatore numero è uno stato coerente. L'applicazione di potenze dell'operatore di innalzamento genera la base $|n\rangle$. Mostriamo ora che tutti gli stati coerenti $|z\rangle$ sono ottenibili da $|0\rangle$ mediante l'applicazione di un operatore unitario $\hat{D}(z)$. Lo sviluppo (3.2) si può riscrivere

$$|z\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|z|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|z|^2)\exp(z\hat{a}^\dagger)|0\rangle$$

Si inserisce un operatore $\exp(z^*\hat{a})$ che lascia invariato lo stato fondamentale:

$$|z\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2)\exp(z\hat{a}^\dagger)\exp(z^*\hat{a})|0\rangle$$

Se $[\hat{A},\hat{B}]$ è un operatore che commuta sia con $\hat{A}$ che con $\hat{B}$, vale la seguente versione della formula di Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} = e^{\hat{A}+\hat{B}} \tag{3.7}$$

Poichè $[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = \hat{I}$ evidentemente commuta con gli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, si ha:

$$\hat{D}(z) = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}e^{z\hat{a}^\dagger}e^{z^*\hat{a}} = e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}} \tag{3.8}$$

Gli operatori $\hat{D}(z)$ sono unitari ed hanno la seguente regola di composizione, per la quale formano una rappresentazione del gruppo delle traslazioni in C, a meno di un fattore di fase:

$$\hat{D}(z_1)\hat{D}(z_2) = \hat{D}(z_1+z_2)e^{\frac{1}{2}(z_1z_2^* - z_1^*z_2)} \tag{3.9}$$

Ogni stato coerente dell'operatore $\hat{a}$ può essere costruito a partire dallo stato di vuoto:

$$|z\rangle = \hat{D}(z)|0\rangle \tag{3.10}$$

L'azione dell'operatore $\exp(s\hat{N})$, con $s \in C$ arbitrario, é assai semplice, e conserva la proprietà di stato coerente: sullo sviluppo (3.2) si calcola immediatamente:

$$\exp(s\hat{N})|z\rangle = |e^s z\rangle \tag{3.11}$$

La probabilità di occupazione dello stato di numero n dell'operatore numero, nello stato coerente $|z\rangle$, è descritta da una distribuzione di Poisson

$$P_n = |\langle n|z\rangle|^2 = \frac{1}{n!}|z|^{2n}e^{-|z|^2} \tag{3.12}$$

Si verifica, utilizzando la formula di Stirling, che il valore massimo di P_n si ottiene attorno a $n \approx |z|^2$.

§4. Trasformazioni lineari e Operatori di Squeeze.

A partire da una rappresentazione irriducibile di operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ è possibile costruire infinite coppie di operatori $\hat{b}$ e $\hat{b}^\dagger$ che soddisfano la relazione (1.1), mediante combinazioni lineari con coefficienti complessi. Per un importante teorema di Von Neumann, per ogni coppia esiste un operatore unitario che le connette:

$$\hat{b} = \hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U}, \qquad \hat{b}^\dagger = \hat{U}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{U} \tag{4.1}$$

Posto $\hat{b} = u\hat{a} + v\hat{a}^\dagger$ e $\hat{b}^\dagger = v^*\hat{a} + u^*\hat{a}^\dagger$, la proprietà di commutazione $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \hat{I}$ comporta la condizione $|u|^2 - |v|^2 = 1$, che è soddisfatta ponendo $u = e^{i\alpha}\cosh t$ e $v = e^{i\beta}\sinh t$. Pertanto, le combinazioni lineari che formano rappresentazioni della (1.1) sono tutte della forma

$$\begin{aligned} \hat{b} &= e^{i\alpha}\hat{a}\cosh t + e^{i\beta}\hat{a}^\dagger \sinh t \\ \hat{b}^\dagger &= e^{-i\beta}\hat{a}\sinh t + e^{-i\alpha}\hat{a}^\dagger \cosh t \end{aligned} \tag{4.2}$$

Un caso particolare assai semplice è costituito da trasformazioni $U(1)$:

$$\hat{b} = e^{i\alpha}\hat{a}, \qquad \hat{b}^\dagger = e^{-i\alpha}\hat{a}^\dagger \tag{4.3}$$

a cui corrisponde un gruppo di operatori unitari $\hat{U}(\alpha)$ che viene facilmente individuato. Applicando a $\hat{b}$ la base degli stati coerenti di $\hat{a}$ si ha: $\hat{b}|z\rangle = e^{i\alpha}z|z\rangle$. Per la relazione di equivalenza unitaria $\hat{b} = \hat{U}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{U}(\alpha)$ risulta:

$$\hat{a}\hat{U}(\alpha)|z\rangle = e^{i\alpha}z\hat{U}(\alpha)|z\rangle$$

cioè $\hat{U}(\alpha)|z\rangle$ è lo stato coerente di $\hat{a}$ di autovalore $e^{i\alpha}z$ e pertanto coincide con $|e^{i\alpha}z\rangle$. In conclusione, tenendo conto della proprietà (3.11):

$$\hat{U}(\alpha) = e^{i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}} \tag{4.4}$$

Abbiamo concluso che l'operatore numero è il generatore delle trasformazioni $\hat{a} \to e^{i\alpha}\hat{a}$, che conservano la proprietà (1.1). In modo esplicito:

$$e^{i\alpha}\hat{a} = e^{-i\alpha\hat{N}}\hat{a}e^{i\alpha\hat{N}}, \qquad e^{-i\alpha}\hat{a}^\dagger = e^{-i\alpha\hat{N}}\hat{a}^\dagger e^{i\alpha\hat{N}} \tag{4.5}$$

Consideriamo ora le trasformazioni generali (4.2). Conviene riscrivere le due relazioni nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\beta)}\hat{b} \\ e^{\frac{i}{2}(\alpha+\beta)}\hat{b}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\alpha-\beta)}\hat{a} \\ e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\beta)}\hat{a}^\dagger \end{pmatrix}$$

Le coppie di operatori nei due vettori sono connesse da una rotazione iperbolica e costituiscono due rappresentazioni della regola di commutazione (1.1). Esiste pertanto un operatore unitario $\hat{U}(t)$ che li connette; cancellando il fattore di fase comune:

$$\hat{b} = e^{i\alpha}\hat{U}(t)\hat{a}\hat{U}(t)^\dagger, \qquad \hat{b}^\dagger = e^{-i\alpha}\hat{U}(t)\hat{a}^\dagger\hat{U}(t)^\dagger \tag{4.6}$$

Gli operatori unitari $\hat{U}(t)$ formano una rappresentazione unitaria fortemente continua nel parametro t del gruppo delle rotazioni iperboliche:

$$\hat{U}(t_1)\hat{U}(t_2) = \hat{U}(t_1 + t_2)$$

La loro azione è la seguente:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha}\hat{U}(t)^\dagger\hat{a}\hat{U}(t) =& e^{i\alpha}\hat{a}\cosh t + e^{i\beta}\hat{a}^\dagger \sinh t \\ e^{-i\alpha}\hat{U}(t)^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{U}(t) =& e^{-i\beta}\hat{a}\sinh t + e^{-i\alpha}\hat{a}^\dagger \cosh t \end{aligned} \tag{4.7}$$

Il gruppo unitario ammette un generatore autoaggiunto $\hat{G}$, che entra nello sviluppo al primo ordine $\hat{U} = \hat{I} + it\hat{G} + \mathcal{O}(t^2)$, ed è ottenibile risolvendo le equazioni che risultano dallo sviluppo al primo ordine in t delle (4.7):

$$-i[\hat{G}, \hat{a}] = e^{-i(\alpha-\beta)}\hat{a}^\dagger, \quad -i[\hat{G}, \hat{a}^\dagger] = e^{i(\alpha-\beta)}\hat{a}$$

Le due equazioni sono risolte da:

$$\hat{G} = \frac{i}{2}[e^{i(\alpha-\beta)}\hat{a}^2 - e^{-i(\alpha-\beta)}\hat{a}^{\dagger 2}] \tag{4.8}$$

Per raccordarsi alla notazione comune, si introducono il parametro complesso di squeeze $\zeta = te^{i(\beta-\alpha)}$, e l'operatore unitario di squeeze

$$\hat{S}(\zeta) = e^{\frac{1}{2}(\zeta\hat{a}^{\dagger 2} - \zeta^*\hat{a}^2)} \tag{4.9}$$

La trasformazione unitaria (4.1) che collega la rappresentazioni (4.2) con quella iniziale è, per la presenza del fattore di fase $e^{i\alpha}$ nella relazione (4.6)

$$\hat{U} = e^{i\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{S}(te^{i(\beta-\alpha)}) \tag{4.10}$$

Per completezza, diamo l'azione dell'operatore di squeeze, desumibile dalle relazioni (4.6) e (4.2). Posto $\zeta = te^{i\varphi}$:

$$\hat{S}(\zeta)^\dagger\hat{a}\hat{S}(\zeta) = \hat{a}\cosh t + e^{i\varphi}\hat{a}^\dagger \sinh t \tag{4.11}$$

§5. Connessione con gli operatori Posizione-Momento.

La regola di commutazione che caratterizza gli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ è strettamente connessa a quella degli operatori autoaggiunti "posizione" $\hat{X}$ e "momento " $\hat{P}$, descritti dalla regola di commutazione di Heisenberg $[\hat{X},\hat{P}]=i\hbar$. A partire da questi ultimi, costruiamo la più generale combinazione lineare che fornisca una rappresentazione della relazione (1.1):

$$\hat{a}=\alpha\hat{X}+\beta\hat{P}, \qquad \hat{a}^\dagger=\alpha^*\hat{X}+\beta^*\hat{P}, \qquad i\hbar(\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)=1 \tag{5.1}$$

$$\hat{N}=\hat{a}^\dagger\hat{a}=|\beta|^2\hat{P}^2+|\alpha|^2\hat{X}^2+\alpha^*\beta\hat{X}\hat{P}+\alpha\beta^*\hat{P}\hat{X} \tag{5.2}$$

Invertendo la relazione (5.1) si ottiene:

$$\hat{X}=i\hbar(\beta^*\hat{a}-\beta\hat{a}^\dagger), \qquad \hat{P}=i\hbar(\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}) \tag{5.3}$$

I valori medi di tali operatori su uno stato coerente $|z\rangle$ dell'operatore $\hat{a}$ definito nell'eq. (5.1) sono:

$$\langle z|\hat{X}|z\rangle=i\hbar(\beta^*z-\beta z^*)\equiv x_0, \qquad \langle z|\hat{P}|z\rangle=i\hbar(\alpha z^*-\alpha^*z)\equiv p_0 \tag{5.4}$$

e le varianze:

$$(\Delta X)^2=\langle z|\hat{X}^2|z\rangle-x_0^2=\hbar^2|\beta|^2, \quad , \quad (\Delta P)^2=\langle z|\hat{P}^2|z\rangle-p_0^2=\hbar^2|\alpha|^2 \tag{5.5}$$

Si noti che il prodotto delle dispersioni $(\Delta X)(\Delta P)=\hbar^2|\alpha\beta|$ non è in generale minimale. Avendo fissato i valori complessi α e β, conviene introdurre la parametrizzazione $z=\alpha x_0+\beta p_0$, mediante la quale lo stato coerente nella base dell'operatore "posizione", soluzione dell'equazione differenziale corrispondente a $\hat{a}|z\rangle=z|z\rangle$

$$\left(\alpha x-i\hbar\beta\frac{d}{dx}\right)\psi_{\alpha x_0+\beta p_0}(x)=(\alpha x_0+\beta p_0)\psi_{\alpha x_0+\beta p_0}(x) \tag{5.6}$$

ha espressione

$$\psi_{\alpha x_0+\beta p_0}(x)=Ce^{-\frac{1}{2}\frac{i\alpha}{\hbar\beta}(x-x_0)^2+\frac{i}{\hbar}p_0(x-x_0)} \tag{5.7}$$

doce C è la costante di normalizzazione. Si osservi che, per la condizione in (5.1), $\mathrm{Re}(i\alpha/\hbar\beta)>0$.

D'ora in avanti, ci limitiamo a considerare coppie di operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ per i quali gli stati coerenti siano a minima incertezza, cioè valga $|\alpha\beta|=1/(2\hbar)$. La condizione di minima incertezza e la relazione $i\hbar(\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)=1$ comportano $\beta=i(2\hbar\alpha^*)^{-1}$. Ponendo, per maggiore simmetria, $\alpha\sqrt{2}=e^{i\theta}/\ell$, il più generale operatore di distruzione è

$$\hat{a}=e^{i\theta}\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\ell}\hat{X}+i\frac{\ell}{\hbar}\hat{P}) \tag{5.8}$$

con autostati a minima indeterminazione

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{1}{\ell\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{1}{2\ell^2}(x-x_0)^2+\frac{i}{\hbar}p_0(x-x_0)} \tag{5.9}$$

e varianze

$$(\Delta X)^2 = \frac{\ell^2}{2} \qquad (\Delta P)^2 = \frac{\hbar^2}{2\ell^2} \tag{5.10}$$

Al variare dei parametri $\ell > 0$ e θ, si hanno diverse famiglie di stati coerenti, associate a distinte coppie di operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$. Ogni famiglia costituisce un sistema ultracompleto, ed è connessa ad un'altra da un operatore unitario il cui effetto é di modificare le incertezze ΔX e ΔP in modo tale da lasciarne inalterato il prodotto. Determinamo le trasformazioni che preservano la proprietà di minima indeterminazione, cioè la forma (5.8); con la (4.2) si costruiscono gli operatori $\hat{b}$ e $\hat{b}^\dagger$ dove

$$\begin{aligned}\hat{b} =& e^{i\alpha}\hat{a}\cosh t + e^{i\beta}\hat{a}^\dagger \sinh t = \\ =& \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\ell}\hat{X}\left(e^{i(\alpha+\theta)}\cosh t + e^{i(\beta-\theta)}\sinh t\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\ell}{\hbar}\hat{P}\left(e^{i(\alpha+\theta)}\cosh t - e^{i(\beta-\theta)}\sinh t\right)\end{aligned}$$

L'operatore $\hat{b}$ ha ancora la forma (5.8) se si scelgono le fasi α e β tali che $\alpha+\theta = \beta-\theta = \phi$. Con ciò:

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}\left(\frac{1}{\ell}e^t\hat{X} + i\frac{\ell}{\hbar}e^{-t}\hat{P}\right) \tag{5.11}$$

La trasformazione unitaria che connette $\hat{b}$ e $\hat{b}^\dagger$ con gli operatori iniziali (5.8) è

$$\hat{b} = U^\dagger\hat{a}\hat{U}, \quad \hat{U} = \hat{S}(te^{i2\theta})e^{i(\phi-\theta)\hat{a}^\dagger\hat{a}} \tag{5.12}$$

Il ruolo dell'operatore di squeeze $\hat{S}$ è evidente: esso attua cambiamenti di scala inversi nelle direzioni x e p. Le varianze degli stati coerenti $|z\rangle_b$ dell'operatore $\hat{b}$ sono:

$$(\Delta X)^2 = \frac{\ell^2}{2}e^{2t}, \qquad (\Delta P)^2 = \frac{\hbar^2}{2\ell^2}e^{-2t} \tag{5.13}$$

§6 La rappresentazione di Bargmann.

E' possibile dare una rappresentazione esplicita assai semplice degli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ su funzioni analitiche. La proiezione di un vettore $|\psi\rangle$ dello spazio astratto $\mathcal{H}$ su uno stato coerente $|z^*\rangle$ permette di introdurre una funzione analitica in z:

$$\psi(z) = e^{\frac{1}{2}|z|^2}\langle z^*|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\psi\rangle\frac{z^n}{\sqrt{n!}} \tag{6.1}$$

Il prodotto interno in $\mathcal{H}$ tra due vettori $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$, introducendo lo sviluppo dell'identità (3.6) mediante stati coerenti, si traduce in un integrale sulle corrispondenti rappresentazioni analitiche:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2z e^{-|z|^2}\psi_1(z)^*\psi_2(z) \tag{6.2}$$

L'equazione (4.2) definisce il prodotto interno in uno spazio di Hilbert di funzioni analitiche denominato "spazio di Bargmann", in cui la base astratta $|n\rangle$ è rappresentata dalle funzioni

$z^n/\sqrt{n!}$, che evidentemente sono una base per le funzioni analitiche. Gli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ operano nel modo più semplice:

$$(\hat{a}f)(z) = f'(z) \quad , \quad (\hat{a}^\dagger f)(z) = zf(z) \tag{6.3}$$

Gli stati coerenti sono funzioni esponenziali:

$$c_\alpha(z) = e^{\frac{|z|^2}{2}}\langle z^*|\alpha\rangle = e^{\alpha z - \frac{1}{2}|\alpha|^2} \tag{6.4}$$

e la relazione di ultracompletezza si traduce nell'identità

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int d^2 w e^{-|w|^2 + w^* z} f(w) \tag{6.5}$$

§7. Sviluppi di Operatori.

Gli stati coerenti, gli autovettori dell'operatore numero, gli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ e infine gli operatori $\hat{D}(z)$ sono gli elementi per definire diversi sviluppi di un operatore definito in $\mathcal{H}$. Ci si limita ad un rapido cenno.
Data la completezza delle basi $|n\rangle$ dell'operatore numero e $|\alpha\rangle$ dell'operatore di distruzione, si possono dare i seguenti sviluppi:

$$\hat{F} = \sum_{m,n}\langle m|\hat{F}|n\rangle |m\rangle\langle n| \quad , \quad \hat{F} = \frac{1}{\pi^2}\int d^2\alpha d^2\beta \langle\alpha|\hat{F}|\beta\rangle|\alpha\rangle\langle\beta| \tag{7.1}$$

Per l'ipotesi di irriducibilità in $\mathcal{H}$, un operatore $\hat{F}$ è necessariamente funzione degli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$; si può pertanto scrivere lo sviluppo

$$\hat{F} = \sum_{n,m} f_{n,m}(\hat{a}^\dagger)^n(\hat{a})^m \tag{7.2}$$

in cui le potenze dell'operatore di abbassamento sono tutte a destra. Una tale forma è detta "normalmente ordinata", ed è la più idonea per la valutazione di elementi di matrice su stati coerenti:

$$\langle\alpha|\hat{F}|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle \sum_{n,m} f_{n,m}(\alpha^*)^n\beta^m \tag{7.3}$$

I coefficienti dello sviluppo normale dell'operatore si possono ottenere invertendo la relazione precedente utilizzando l'integrale (3.5):

$$f_{n,m} = \frac{1}{n!m!\pi^2}\int d^2\alpha\, d^2\beta e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2 - \alpha^*\beta}\langle\alpha|\hat{F}|\beta\rangle\alpha^n(\beta^*)^m \tag{7.4}$$

Per esempio, per il proiettore sullo stato di vuoto si calcola

$$|0\rangle\langle 0| = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}(\hat{a}^\dagger)^r(\hat{a})^r \tag{7.5}$$

Un prodotto di fattori, ciascuno dei quali è una potenza di $\hat{a}$ o $\hat{a}^\dagger$, può essere espresso come somma di termini in forma normale, mediante l'uso delle regole di commutazione. Per esempio:

$$\hat{a}^2(\hat{a}^\dagger)^2 = 2 + 4\hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2(\hat{a})^2$$

L'ultimo addendo è quello che si ottiene dall'operatore iniziale, ordinando normalmente i fattori come se commutassero: si scrive

$$:\hat{a}^2(\hat{a}^\dagger)^2 := (\hat{a}^\dagger)^2(\hat{a})^2$$

Il delimitatore : ... : è il simbolo di prodotto normalmente ordinato, e sottintende la riscrittura dell'argomento in forma normalmente ordinata, come se gli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ commutassero. Per esempio, per la (7.5):

$$: e^{-\hat{a}^\dagger\hat{a}} := |0\rangle\langle 0| \tag{7.6}$$

Ogni operatore, scritto come somma di termini che sono prodotti di potenze di $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, è uguale alla sua forma normalmente ordinata più termini normalmente ordinati di grado più basso, conseguenti dalle commutazioni effettuate.
Oltre allo sviluppo normale, si può costruire lo sviluppo anti-normale di un operatore:

$$\hat{F} = \sum_{n,m} f^A_{n,m}(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^m \tag{7.7}$$

Inserendo una completezza di stati coerenti tra le due potenze di operatori, si perviene ad una rappresentazione assai interessante dell'operatore:

$$\hat{F} = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha f^P(\alpha,\alpha^*)|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{7.8}$$

dove:

$$f^P(\alpha,\alpha^*) = \sum_{n,m} f^A_{n,m}\alpha^n(\alpha^*)^m \tag{7.9}$$

Essa è nota come rappresentazione P dell'operatore, ed è interessante in quanto esprime l'operatore come sovrapposizione continua di proiettori $|\alpha\rangle\langle\alpha|$. Il kernel f^P è legato agli elementi di matrice diagonali di $\hat{F}$ su stati coerenti dalla relazione:

$$\langle\beta|\hat{F}|\beta\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha f^P(\alpha,\alpha^*)\exp(-|\alpha-\beta|^2) \tag{7.10}$$

Un ulteriore sviluppo, rilevante per la definizione della funzione di Wigner e la formulazione della meccanica quantistica nello spazio delle fasi, è lo sviluppo di Weyl di un operatore nella base continua di operatori $\hat{D}(z)$:

$$\hat{F} = \frac{1}{\pi}\int d^2z\tilde{f}(z,z^*)\hat{D}(z) \tag{7.10}$$

Ci si limita ad osservare che, nello schema di Weyl di quantizzazione di funzioni sullo spazio delle fasi, la funzione $\tilde{f}$ è strettamente collegata alla trasformata di Fourier della funzione $f(x,p)$ corrispondente all'operatore.

Bibliografia.

La letteratura sull'argomento è immensa; i riferimenti elencati hanno valore di semplice orientamento.

Per una dettagliata trattazione delle proprietà di dominio e di equivalenza unitaria degli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ si consulti:

M.Reed and B.Simon: "Functional Analysis", in Methods of Modern Mathematical Physics, Vol.1, Academic Press, 1972.

Gli stati coerenti dell'oscillatore armonico sono generalizzabili ad algebre di Lie diverse da quella formata dagli operatori $\hat{N}$, $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$. Il testo di riferimento è:

A.Perelomov: "Generalized Coherent States and their applications", Springer-Verlag 1986, Texts and Monographs in Physics.

Alcuni riferimenti che illustrano applicazioni fisiche di di stati coerenti:

S.Kais and R.D.Levine: "Coherent states for the Morse oscillator", Phys. Rev. A 41 (1990) 2301.

I.L.Cooper: "A simple algebraic approach to coherent states for the Morse oscillator", J. Phys. A 25 (1992) 1671.

C.Gerry and J.Kiefer: "Radial coherent states for the Coulomb problem", Phys. Rev. A 37, (1988) 665.

J.G.Hartley and J.R.Ray: "Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator", Phys. Rev. D 25 (1982) 382.

K.H.Yeon and C.I.Um: "Coherent states for the damped harmonic oscillator", Phys. Rev. A 36 (1987) 5287.

A.Voros: "W.K.B. method in the Bargmann representation", Phys. Rev. A 40 (1989) 6814.

Per una lettura assai interessante dell'applicazione degli stati coerenti allo studio del campo e.m. si raccomanda:

R.J.Glauber: "Coherent and incoherent states of the radiation field", Phys. rev. **131** (1963) 2766.

Altri riferimenti:

J.R.Klauder and E.C.G.Sudarshan: "Fundamentals in Quantum Optics", Benjamin, New York (1968).

D.F.Walls and G.J.Milburn: "Quantum Optics", Springer, 1995.

Y.S.Kim e M.E.Noz: "Phase space picture of Quantum Mechanics", Lecture Notes in Physics Series Vol. 40, World Scientific (1991).

V.Bargmann: "On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform", Comm. Pure Appl. Math. Vol.XIV (1961) 187.

Il sistema ultracompleto degli stati coerenti, come mostrato da Von Neumann, ammette sottinsiemi numerabili completi; alla soluzione del problema contribuisce il lavoro:

V.Bargmann, P.Butera, L.Girardello and J.R.Klauder: "On the completeness of the coherent states", Rep. Math. Phys. **2** (1971) 221.