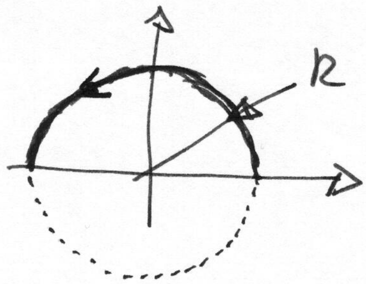
Tema del 23-9-2019

1) $\gamma_R = \{ z = Re^{i\theta} \quad \theta \in [0,\pi] \}$



calcolare $\lim_R \int_{\gamma(R)} \frac{\exp(-i\pi z)}{z^2-2z+2}$

se $z \in \gamma(R)$ $Re(-i\pi z(\theta)) > 0$ non si può usare il lemma di Jordan, che invece è valido per $z = Re^{i\theta}$ con $\theta \in [\pi, 2\pi]$. Consideriamo allora una circonferenza $C(R)$ di raggio R e centro nell'origine. Evidentemente (per orientazione positiva) $\lim_{R\to\infty} \int_{C(R)} dz \frac{e^{-i\pi z}}{z^2-2z+2} = 2\pi i \sum Res.$

$$z^2-2z+2=0 \Rightarrow z = 1 \pm i$$

$$\lim_{z\to 1+i} (z-(1+i)) \frac{e^{-i\pi z}}{(z-(1+i))(z-(1-i))} = \frac{-e^{+\pi}}{2i}$$

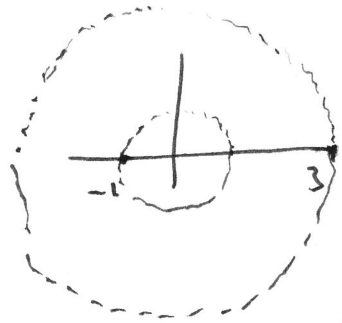
$$\lim_{z\to 1-i} (z-(1-i)) \frac{e^{-i\pi z}}{(z-(1+i))(z-(1-i))} = -\frac{e^{-\pi}}{-2i}$$

Quindi la risposta è $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma(R)} f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_{C(R)} f(z)dz =$

$$= 2\pi i\left(\frac{-e^{+\pi}}{2i} + \frac{e^{-\pi}}{2i}\right) = \pi\left(-e^{\pi} + e^{-\pi}\right)$$

$$= -2\pi \operatorname{senh} \pi$$

2) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-2z-3}$



$$\frac{1}{z^2-2z-3} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+1}\right]$$

e' possibile sviluppare in serie di Taylor con centro in $z=0$, esistono poi uno sviluppo di Laurent nelle corona circolare $1<|z|<3$, ed un altro per $|z|>3$.

sv. Taylor

$$\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+1} = -\frac{1}{3\left(1-z/3\right)} - \frac{1}{z+1} =$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n - \sum_{0}^{\infty}(-)^n z^n = \sum_{0}^{\infty}\left[-\frac{1}{3^{n+1}} - (-)^n\right] z^n$$

moltipl. per $1/4$ si ha il risultato

per $1<|z|<3$

$$\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+1} = -\frac{1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)} - \frac{1}{z\left(1+1/z\right)} =$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n - \sum_{0}^{\infty}(-)^n z^{-(n+1)}$$

il secondo termine è la parte principale dello sviluppo di L. (al solito occorre molt. per $1/4$)

le ultimo per $|z|>3$

$$\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)}-\frac{1}{z\left(1+1/z\right)}=$$

$$=\sum_0^\infty 3^n z^{-(n+1)}-\sum(-)^n z^{-(n+1)}=\sum_0^\infty\left[3^n-(-)^n\right]z^{-(n+1)}$$

abbiamo solo la parte principale.

3)
$$(B,\hat{K}A)=\mathrm{tr}\left(B^+[Q,A]\right)=\mathrm{tr}\left(B^+QA\right)-\mathrm{tr}\left(B^+AQ\right)=$$

$$=\mathrm{tr}\left(B^+QA\right)-\mathrm{tr}\left(QB^+A\right)=\mathrm{tr}\left((Q^+B)^+A\right)-\mathrm{tr}\left((BQ^+)^+A\right)$$

$$=\mathrm{tr}\left([Q^+,B]^+A\right)\Rightarrow\hat{K}^+B=[Q^+,B].$$

se $B=\mathbb{1}$ o $B=Q^+$ $\hat{K}^+B=0$, quindi non e' iniettivo. Poiche' $\overline{\mathrm{Ran}\,\hat{K}}=(\mathrm{Ker}\,\hat{K}^+)^\perp$

si ha che $\mathrm{Ran}\,\hat{K}\neq\mathcal{H}$.

sia ora $Q=Q^+$ e $\{\lambda_i\}_1^n$ i suoi autovalori (reali)

sappiamo per il I spettrale che esiste U unitaria

tale che $(U^+QU)_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$, cioe' Q

puo' essere posta in forma diagonale. Allora

$$[Q,A]=\lambda A\Rightarrow[U^+QU,U^+AU]=\lambda U^+AU$$

sia $\tilde{A}=U^+AU$ e $\tilde{Q}=U^+QU$

Quindi $[\tilde{Q}, \tilde{A}]_{ij} = \lambda \tilde{A}_{ij} \Rightarrow$

$$\sum_m \{\lambda_i \delta_{im} \tilde{A}_{mj} - \tilde{A}_{im} \delta_{mj} \lambda_j\} = \lambda \tilde{A}_{ij} \quad \text{cioè } \forall i, j$$

$$(\lambda_i - \lambda_j) \tilde{A}_{ij} = \lambda \tilde{A}_{ij}$$

. Se $\hat{A} \neq 0$ $\exists \tilde{A}_{\bar{i}\bar{j}} \neq 0$:

se $\tilde{A}_{\bar{i}\bar{j}} \neq 0$ allora $\lambda = \lambda_{\bar{i}} - \lambda_{\bar{j}}$

che determina lo spettro di $\hat{k}$.

Ammettiamo ora che lo spettro di Q sia non degenere, ovvero i numeri $\{\lambda_i\}_1^n$ sono n numeri differenti. Allora $(\lambda_i - \lambda_j) \tilde{A}_{ij} = 0$ comporta $\tilde{A}_{ij} = 0$, a meno che $i = j$. Abbiamo quindi n soluzioni linearmente indipendenti: $\tilde{A}_{11} \neq 0$ e $\tilde{A}_{ij} = 0$ altrimenti, $\tilde{A}_{22} \neq 0$ e $\tilde{A}_{ij} = 0$ altrimenti, etc. etc. Quindi $\dim(\mathrm{Ker}\, \hat{k}) = n$.

4) $$f(x) = \int dy \, \frac{e^{-y^2}}{1+(x-y)^2}$$

sappiamo che allora $\tilde{f}(k) = \sqrt{2\pi}\, \tilde{g}(k)\, \tilde{h}(k)$

con $$\tilde{g}(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2 - ikx}$$ e

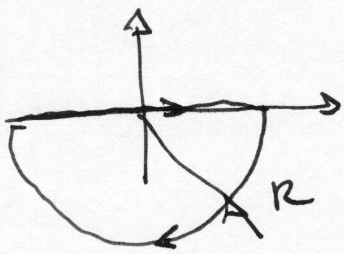
$$\tilde{h}(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{e^{-ikx}}{1+x^2}$$

per $\tilde{g}(k)$ "sappiamo" che è corretto il seguente passaggio formale: $$\tilde{g}(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x+\frac{i}{2}k)^2 - \frac{k^2}{4}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2}\, e^{-k^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-k^2/4}.$$

per $\tilde{h}(k)$ notiamo che $$\tilde{h}(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{\cos kx}{1+x^2} = \tilde{h}(-k)$$

assumiamo allora $k>0$ e consideriamo il cammino



dove poi $R \to +\infty$.

usando il lemma di Jordan ed il Teor. dei residui, concludiamo per $k > 0$

$$\tilde{h}(k) = -\frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \cdot \lim_{z \to -i} (z+i) \frac{e^{-izk}}{1+z^2} =$$

$$= -\frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-k}}{(-2i)} = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} e^{-k} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-k}$$

Quindi $\tilde{h}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|k|} \quad \forall k.$

da cui il risultato.

5) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{2\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

il limite del primo addendo sappiamo che esiste e definisce "la parte principale", $⨍ dx \frac{\varphi(x)}{x}$, una distribuzione ben definita e <u>nota</u> allo studente.

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_1^2 \varphi(\varepsilon t) \frac{dt}{t}, \quad \left| \frac{\varphi(\varepsilon t)}{t} \right| \le \frac{\text{Cost}}{t} \in L_1[1,2].$$

Per il T. conv. dominata allora

$$\int_1^2 \varphi(\varepsilon t) \frac{dt}{t} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varphi(0) \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln 2 \;\; \varphi(0).$$

Il limite della distribuzione oggetto dell'esercizio

è quindi $\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) + \ln 2 \; \delta_0(x)$.