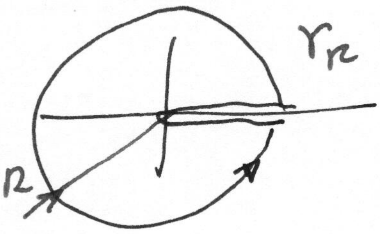
Tema del 10-9-19

1) $\int_{-2}^{2} dx \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$ $\qquad t = \frac{2+x}{2-x}$ $\qquad 2t - tx = 2+x$

$2(t-1) = x(1+t)$ $\qquad x = 2\frac{t-1}{t+1}$ $\qquad dx = 2\frac{t+1-(t-1)}{(t+1)^2} = \frac{4}{(t+1)^2}dt$

$$4\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2}\sqrt{t} = 4I$$



(eventualmente $t = u^2$)

$$\int_{\gamma_R} \xrightarrow[R\to\infty]{} I - \int_0^\infty dt \frac{1}{(t+1)^2}\sqrt{t-i\varepsilon} = I - \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2}(-\sqrt{t})$$

$= 2I$

calcolo $\int_{\gamma_R} = 2\pi i \sum Res = 2\pi i\, Res(-1)$

$$\sqrt{t} = \sqrt{t+1-1} \simeq \sqrt{-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-1}}(t+1) = i + \frac{1}{2i}(t+1)$$
$$= i - \frac{i}{2}(t+1)$$

$$\frac{1}{(1+t)^2}\left(i - \frac{i}{2}(t+1)\right) = \frac{i}{(t+1)^2} - \frac{i}{2(t+1)}$$

$\Rightarrow Res = -\frac{i}{2}$. quindi

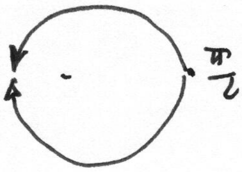
$$2I = 2\pi i\left(\frac{-i}{2}\right) = \pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}$$

Quindi $4I = 2\pi$ che è il risultato.

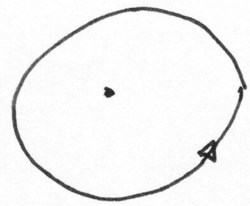
N.B. L'integrale può essere svolto anche in altro modo, in particolare ponendo $x = 2\sin t$, in modo "elementare".

2] $f(z) = \int_{\gamma(z)} \frac{\cos\zeta}{\zeta^2}\, d\zeta$. l'integrando è olomorfo in $\mathbb{C}-\{0\}$

e $f(z)$ definisce quindi una funzione olomorfa in ogni regione sufficientemente convessa che non contenga 0. Per estendere a $\mathbb{C}-\{0\}$ occorre però il problema se due diversi cammini che aggirino 0 come lo disegno portino allo stesso risultato. Il punto è se



$\oint d\zeta \frac{\cos\zeta}{\zeta^2} = 0$? per



cammini tali che $\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = \cancel{1} \neq 0$

Il residuo in 0 dell'integrando è però nullo, e quindi non risulta mai la $\oint d\zeta \frac{\cos\zeta}{\zeta} \neq 0$. dimostra l'affermazione. che porterebbe nel caso alla definizione di una funzione olomorfa in una regione con un taglio spiccato da $z=0$.

$$f(z) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{z} d\zeta \frac{\cos\zeta}{\zeta^2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{z} d\zeta \frac{\cos\zeta - 1 + 1}{\zeta^2} = -\frac{1}{z} + g(z)$$

dove $g(z)$ è olomorfa. Quindi la parte principale della suddetta è $-\frac{1}{z}$.

$$\left(g(z) \equiv \int_{\frac{\pi}{2}}^{z} d\zeta \frac{\cos\zeta - 1}{\zeta^2} + \frac{2}{\pi} \right)$$

3) $T_a f = \begin{cases} f(x) & \text{per } x > a \\ -f(x) & \text{per } x < a \end{cases}$

- è autoagg. è evidente dalla definizione $(g, T_a f) = (T_a g, f)$

T_a è ovviamente un op. limitato con $\|T_a\| = 1$ con dominio tutto $L^2(\mathbb{R})$. Inoltre $T_a^2 = \mathbb{1} = T_a^+ T_a = T_a T_a^+$

quindi T_a è anche unitario.

- $T_a f = \lambda f \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \lambda f(x) & \text{per } x > a \\ -f(x) = \lambda f(x) & \text{per } x < a \end{cases}$

se $f(x) \neq 0$ per $x > a$ allora $\lambda = 1 \Rightarrow \underline{f(x) = 0 \text{ per } x < a.}$

viceversa se $f(x) \neq 0$ per $x < a$ allora $\lambda = -1 \Rightarrow \underline{f(x) = 0 \text{ per } x > a.} \Rightarrow$

$\lambda = \pm 1$ sono gli autovettori, e gli autospazi sono definiti dalle affermazioni sottolineate.

puntualmente $(T_a f)(\cancel{x}) \to -f(x)$ $\forall x$ per $a \to +\infty$

$$\| T_a f - (\cancel{-} f(x)) \|^2 = \int_a^{\infty} |2 f(x)|^2 dx \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$$

per il T. della conv. dominata essendo $4|f|^2 \in L_1$ maggior. integrabile.

fisso ora $a > b$ $\quad T_a f - T_b f = \begin{cases} 0 & \text{per } x > a > b \\ \\ 0 & \text{per } x < b < a \end{cases}$

per $x \in [a, b]$ $\quad T_a f - T_b f = -2f$

$\| T_a f - T_b f \|^2 = 2^2 \int_a^b |f(x)|^2 dx$ prendendo una f non nulla solo ~~tra~~ a e b di norma 1 ottengo $\|T_a - T_b\| \geq 2$

Quindi la successione non e' di Cauchy e non c'e' convergenza in norma.

- commutatore $[T_a, T_b]$. (Sia $\Theta = \Theta$ di Heaviside.)

$$(T_a f)(x) = \Theta(x-a) f(x) - \Theta(a-x) f(x) = -f(x) + 2\Theta(x-a) f(x).$$

$$(T_a T_b f)(x) = -(T_b f)(x) + 2\,\Theta(x-a)\, T_b f =$$

$$= f(x) - 2\,\Theta(x-b) f(x) + 2\,\Theta(x-a)\big(-f(x) + 2\,\Theta(x-b) f(x)\big) =$$

$$= -2\big(\Theta(x-b) + \Theta(x-a)\big) f(x) + f(x) + 4\,\Theta(x-a)\Theta(x-b) f(x)$$

$$= (T_b T_a f)(x)$$

infatti l'espressione e' simmetrica sotto $a \leftrightarrow b$.

- Se due operatori (autoaggiunti e limitati) ammettono un set di autovettori comuni $\{u_n\}$ $A u_n = a_n u_n$ $B u_n = b_n u_n$ allora certamente commutano.

$$AB \sum c_n u_n = A \sum c_n b_n u_n = \sum c_n a_n b_n u_n =$$

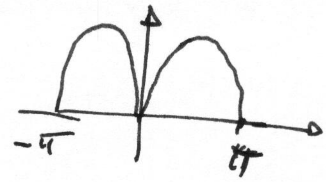
$$= B \sum c_n a_n u_n = BA \sum c_n u_n.$$

Il viceversa non e' vero per il fatto che se $\dim \mathcal{H} = \infty$ gli operatori possono non avere nessun autovettore, si pensi ad es. all'op. di moltiplicazione.

Per avere l'implicazione inversa occorre generalizzarsi introducendo gli "autovettori impropri".

in $L^2[-\pi,\pi]$ consideriamo la funzione pari definita da

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{per } x\in[0,\pi]\\[2ex] \sin(+x)=\sin(-x) & \text{per } x\in[-\pi,0]\end{cases}$$



allora l'espansione di F. per $x>0$ fornisce

$$\sin x = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n \cos nx \quad \text{in}$$

la conv. è anche puntuale per il T. Dini
(vedi il seguito)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\cos nx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos nx =$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi\left[\sin((n+1)x)+\sin((1-n)x)\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}\Big|_0^\pi - \frac{\cos(1-n)x}{1-n}\Big|_0^\pi\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{(-)^{n+1}-1}{n+1} - \frac{(-)^{n+1}-1}{1-n}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{(-)^n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{1-n}\right)+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{1-n}\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\left(1+(-)^n\right)\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)\right\}=\frac{1}{\pi}\left(1+(-)^n\right)\frac{-2}{n^2-1}$$

$$=-\frac{2}{\pi}\,\frac{1+(-)^n}{n^2-1}$$

Quindi $a_{2k+1} = 0$ $\quad a_{2k} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4k^2-1}$

quindi:

$$|\sin x| = \frac{4}{2\pi} + \sum_{1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{4k^2-1} \cos 2kx$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$$

~~...~~ avendo $|\sin x|$ derivata dx e sx in 0 è

vero che $0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{4k^2-1} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$

<u>oss.</u> oltre alla conv. puntuale avendo funzioni pari, della convergenza in $L^2[-\pi,\pi]$ deduciamo quella in $L^2[0,\pi]$.

---

5)

$$\left\langle \frac{1}{N} \sum_{k} \delta_{\frac{k}{N}}, \varphi \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{-N}^{N} \varphi\left(\frac{k}{N}\right) \longrightarrow \int_{-1}^{1} dx\, \varphi(x)$$

riconosciamo infatti l'integrale di Riemann.

Poiché $\langle \Delta_N, \varphi\rangle$ converge per ogni φ il limite definisce per la "completezza" di $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

una distribuzione

In effetti il limite è una distribuzione regolare.

Calcoliamone la derivata:

$$\langle \Delta'_\infty, \varphi\rangle = - \langle \Delta_\infty, \varphi'\rangle = - \int_{-1}^{1} dx\, \varphi'(x) = -\varphi(1) + \varphi(-1)$$

$$\Rightarrow \Delta'_\infty = -\delta_1 + \delta_{-1}.$$

Un'ultima osservazione sull'es. N. 4.

se $f \in L^2[0,\pi]$ procedendo "per parità" come

nel caso di $f(x) = \sin x$ scriviamo sicuramente

e $f = \sum_0^\infty a_n \cos nx$, analogamente riflettendo

per "antisimmetria" scriviamo $f = \sum_1^\infty b_n \sin nx$.

In quanto $f \in L^2[0,\pi]$ esiste poi

l'espansione nelle funzioni periodiche $\cos 2nx$, $\sin 2nx$

$$f = \sum_0^\infty a'_n \cos 2nx + \sum b'_n \sin 2nx .$$

In generale $a'_n \neq 0$ e $b'_n \neq 0$, le tre espansioni

sono differenti.