

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
Prova scritta del 21 giugno 2013

Esercizio 1

Calcolare l'integrale ($a > 0$):

$$\int_0^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \frac{1}{x^2 + a^2}.$$

Esercizio 2

Calcolare l'integrale:

$$\int_0^{2\pi} dx \frac{\cos(2x)}{3 + \cos^2 x}$$

Esercizio 3

Determinare lo sviluppo di Fourier della funzione e^{-ax} (a reale) in $L^2(-1, 1)$. Dedurre qualche interessante identità.

Esercizio 4

A partire da uno spazio di Hilbert \mathcal{H} con prodotto interno $x, y \rightarrow (x|y)$ si costruisce lo spazio $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ i cui elementi X sono le coppie ordinate (x_1, x_2) . Introdotta nel modo ovvio la somma e moltiplicazione per uno scalare, si mostri che $(X|Y)_2 := (x_1|y_1) + (x_2|y_2)$ è un prodotto interno, e che lo spazio è completo.

Esercizio 5

Sia A un operatore lineare in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\lambda \in \mathbb{C}/\{0\}$. Discutere la convergenza della successione $S_N := \sum_{k=0}^N A^k / \lambda^{k+1}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Indicare alcune proprietà dell'operatore limite.

Esercizio 6

Stabilire se la mappa F :

$$F \varphi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \varphi(x), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

è una distribuzione temperata, e calcolarne la derivata.