

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
Prova scritta del 11 settembre 2013

Esercizio 1

Calcolare l'integrale:

$$\int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{x^3 + x^2 + x + 1}.$$

Esercizio 2

Calcolare, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, la parte reale e la parte immaginaria di:

$$\int_C dz \frac{e^{-z} \sin z}{z^n}$$

C è la circonferenza unitaria centrata sull'origine, percorsa in senso antiorario.

Esercizio 3

Mostrare che una norma Hilbertiana soddisfa la "proprietà del parallelogramma": $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, e fornire esempi di norme che la soddisfano e non.

Eventualmente costruire esplicitamente il prodotto interno associato ad una norma che soddisfa proprietà del parallelogramma (si consideri per semplicità il caso di spazio normato reale).

Esercizio 4

Si considerino le matrici

$$M(t) = \cos(5t) \mathbb{I} + \frac{i}{5} \sin(5t) \begin{pmatrix} 4 & -3i \\ 3i & -4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Mostrare che esse formano un "gruppo unitario fortemente continuo" nel parametro t sullo spazio $\mathbb{C}^2$. Determinare il generatore del gruppo: $M(t) = \exp(-itH)$.

Esercizio 5

Mostrare che:

- 1) a ogni funzione in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ è associata una distribuzione temperata;
- 2) se $f_n \rightarrow f$ in $L^2(\mathbb{R})$ allora $f_n \rightarrow f$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Esercizio 6

Enunciare il teorema di Riemann-Lebesgue e illustrarlo con qualche appropriato esempio.