

METODI MATEMATICI DELLA FISICA
Prova scritta del 3 luglio 2013

Esercizio 1

Calcolare l'integrale:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2}.$$

Esercizio 2

Calcolare l'integrale in parte principale (k e y reali):

$$P \int_{\mathbb{R}} dx \frac{e^{ikx}}{x-y}$$

Esercizio 3

Determinare la parte principale dello sviluppo di Laurent in $z = 1$ della funzione

$$\frac{z \sin(3z)}{(z-1)^4}$$

Esercizio 4

Si consideri il funzionale $F : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$:

$$Ff = \int_{-1}^1 dx \frac{f(x)}{x+i}$$

Dire se F appartiene al duale di $L^2(\mathbb{R})$ e calcolarne la norma.

Esercizio 5

Dati n elementi x_1, \dots, x_n di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , si consideri la matrice $n \times n$ dei prodotti interni $G_{ij} := (x_i | x_j)$.

- 1) Mostrare che gli autovalori della matrice G sono non negativi.
- 2) Cosa significa la presenza di autovalori nulli?
- 3) Nel caso strettamente positivo, mostrare che $G = TT^\dagger$, dove T è una matrice triangolare (si pensi al procedimento di Gram-Schmidt).

Esercizio 6

Qual'è il limite in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ della successione $x^3 \sin(nx)$, $n = 1, 2, \dots$?