

**Metodi Matematici della Fisica
qualche esercizio di analisi funzionale**

Esercizio 1. Si consideri l'operatore $G : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R})$

$$(Gf)(x) = \int dy g(x-y)f(y), \quad g(x) = 1 - \tanh^2 x$$

- 1) Si mostri che l'operatore è ben definito.
- 2) Si dimostri che $G : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- 3) Si dimostri che G è un operatore limitato e si calcoli $\|G\|$.
- 4) Si dimostri che G è invertibile.

Svolgimento: La convoluzione di due funzioni di L^1 è di L^1 , quindi il problema è ben posto. La funzione g è in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e la convoluzione di due funzioni di tale spazio è ancora in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, questo chiarisce il punto secondo.

Per il terzo sappiamo per le proprietà delle convoluzioni che $\|Gf\|_1 \leq \|g\|_1 \|f\|_1$, pertanto l'operatore è limitato e la sua norma non supera $\|g\|_1$. Poichè $g \geq 0$, se $f \geq 0$ si ha $(Gf)(x) \geq 0$. In questo caso vale il segno di uguaglianza:

$$\|Gf\|_1 = \int dx \int dy g(x-y)f(y) = \int dy f(y) \int dx g(x-y) = \|g\|_1 \|f\|_1$$

Pertanto $\|G\| = \|g\|_1$. Per il calcolo di $\|G\|$ conviene, anche in relazione al punto successivo, calcolare la trasformata di Fourier di g :

$$\tilde{g}(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} (1 - \tanh^2(x)) e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi k}{\sinh(k\pi/2)}$$

(si tratta di integrale di funzione iperbolica da effettuare col metodo dei residui)

Di conseguenza (si ricorda che $g \geq 0$): $\|g\|_1 = \int dx g(x) = \sqrt{2\pi} \tilde{g}(0) = 2$.

Per l'invertibilità conviene passare allo spazio delle trasformate. Il nucleo di G è dato dalle funzioni f tali che $Gf = 0$, che implica $\tilde{g}(k)\tilde{f}(k) = 0$, cioè $\tilde{f}(k) = 0$. Ne consegue $f = 0$ per il teorema di inversione della trasformata di Fourier.

Esercizio 2. Si discuta la risolubilità nello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dell'equazione

$$i \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \int dy g(x-y) f(y,t), \quad g(x) = 1 - \tanh^2 x$$

ovvero posto $f_t(x) = f(x,t)$, se $f_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ esiste una soluzione $f_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \forall t$?

Svolgimento: Poichè la convoluzione di due funzioni di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{F}\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la discussione è agevole facendo la trasformata di Fourier

di entrambi i membri dell'equazione. Nell'ipotesi che la derivata temporale e la trasformata di Fourier commutino:

$$i \frac{\partial \tilde{f}(k, t)}{\partial t} = \sqrt{2\pi} \tilde{g}(k) \tilde{f}(k, t) = \frac{\pi k}{\sinh(k\pi/2)} \tilde{f}(k, t)$$

La soluzione dell'equazione differenziale con $\tilde{f}(k, 0) = \tilde{f}_0(k)$ è

$$\tilde{f}(k, t) = \tilde{f}_0(k) \exp \left[\frac{-i\pi k t}{\sinh(k\pi/2)} \right]$$

Si osserva che se $f_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, allora f_t vi resta per ogni tempo.

Rimane da controllare che la derivata temporale e l'operazione di trasformata commutino: $D_t \mathcal{F} f_t = \mathcal{F} D_t f_t$. Passando al rapporto incrementale ciò significa verificare che il limite $h \rightarrow 0$ può essere scambiato con l'integrale.

$$\int dk \frac{\tilde{f}(k, t+h) - \tilde{f}(k, t)}{h} e^{ikx} = \int dk \tilde{f}(k, t) \frac{1}{h} \left[\exp\left(\frac{-i\pi k h}{\sinh(k\pi/2)}\right) - 1 \right] e^{ikx}$$

Posto $A = \frac{\pi k}{\sinh(k\pi/2)}$ si ha $|A| \leq 2$, e inoltre

$$\left| \frac{\exp(-iAh) - 1}{h} \right| \leq \left| \frac{1 - \cos Ah}{h} \right| + \left| \frac{\sin Ah}{h} \right| \leq \frac{h}{2} A^2 + A$$

Abbiamo quindi facilmente una maggiorante integrabile che autorizza l'uso del teor. della convergenza dominata.

Esercizio 3. In $L^2(\mathbb{R})$ consideriamo l'operatore H con dominio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$(Hf)(x) = \int dy g(x-y) f(y, t), \quad g(x) = 1 - \tanh(x)^2$$

- 1) Si dimostri che H è limitato sul suo dominio;
- 2) Si argomenti sulla possibile estensione dell'operatore a tutto $L^2(\mathbb{R})$.
- 3) Quali sono le proprietà di H rispetto all'aggiunzione e alla sua estensione?
- 4) Si discuta la risolubilità dell'equazione $i \frac{df_t}{dt} = H f_t$, dove la derivata temporale è intesa nel senso della norma.

Svolgimento: Essendo $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha $Hf \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Usando l'isometria della tr. di Fourier possiamo scrivere

$$\|Hf\|_2^2 = \|\mathcal{F} Hf\|_2^2 = \int dk |\sqrt{2\pi} \tilde{g}(k) \tilde{f}(k)|^2 = \int dk \frac{(\pi k)^2}{\sinh^2(k\pi/2)} |\tilde{f}(k)|^2$$

Pertanto: $\|Hf\|_2^2 \leq 4 \|\tilde{f}\|_2^2 = 4 \|f\|_2^2$, dove il fattore 4 origina dal massimo di \tilde{g} nell'integrale.

Essendo H limitato e $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ denso in L^2 , l'operatore è esteso univocamente tramite $H'f = \lim Hf_n$ dove f_n è una successione in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergente a

$f \in L^2$. Si dimostra facilmente che la definizione non dipende dalla successione scelta convergente a f , e che $\|H'\| = \|H\|$.

L'operatore H è simmetrico, ovvero soddisfa $(g, Hf) = (Hg, f)$ se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (basta scrivere esplicitamente (g, Hf) come integrale doppio. L'integrale doppio esiste e quindi l'ordine delle due integrazioni può essere invertito). A questo punto il risultato segue dal fatto che g è una funzione pari e reale.

Da $(g_m, Hf_n) = (Hg_m, f_n)$ con $f_n \rightarrow f$ e $g_m \rightarrow g$ si ottiene $(g, H'f) = (H'g, f)$, H' è quindi un op. limitato su L^2 ed autoaggiunto.

Sappiamo che l'operatore $\exp(-iH't)$ viene definito attraverso la serie esponenziale, e che tale serie converge in norma, e che il risultato è un operatore unitario. La funzione $f_t = \exp(-iH't)f_0$ risolve l'eq. differenziale in discussione.

Una domanda spontanea: se $f_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ possiamo dire $f_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$? La serie esponenziale applicata a f_0 converge in L_2 e a priori non in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, la risposta non è quindi banalmente affermativa. Viceversa nel precedente esercizio $f_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ma la derivata temporale ha un altro significato, è un'altra equazione (nell'eq. di Schrödinger la derivata temporale è nel senso della norma). Dalla soluzione esplicita del precedente esercizio si verifica però facilmente che la derivata rispetto al tempo nel senso della norma esiste ed è data dalla derivata parziale rispetto al tempo: la risposta alla domanda è quindi affermativa.

Esercizio 4. Sia A un operatore limitato su uno spazio di Hilbert, con norma $\|A\|$. Per quali $\lambda \in \mathbb{C}$ si può definire l'operatore $\tan^{-1}(\lambda A)$? Sapreste porre un qualche limite a $\|\tan^{-1}(\lambda A)\|$?

Svolgimento: Per prima cosa occorre procurarsi un'espressione esplicita della funzione $u = \tan^{-1}(z)$. Posto $z = \tan u = -i \frac{\exp(iu) - \exp(-iu)}{\exp(iu) + \exp(-iu)}$ ricaviamo

$$\tan^{-1}(z) = \frac{1}{2i} \log \frac{1-iz}{1+iz} = \frac{\log(1-iz) - \log(1+iz)}{2i} = \frac{1}{2i} \sum_1^{\infty} \frac{(-)^n - 1}{n} (iz)^n$$

La serie ha raggio di convergenza 1. Pertanto la serie

$$\tan^{-1}(\lambda A) = -\frac{1}{i} \sum_0^{\infty} \frac{(i\lambda A)^{2n+1}}{2n+1}$$

converge in norma se $\|\lambda A\| < 1$, cioè $|\lambda| < 1/\|A\|$.

Per la continuità della norma otteniamo

$$\|\tan^{-1}(\lambda A)\| \leq \sum_0^{\infty} \frac{\|\lambda A\|^{2n+1}}{(2n+1)} \leq \frac{1}{2} \log \frac{1+\|\lambda A\|}{1-\|\lambda A\|}.$$

Esercizio 5. Consideriamo la funzione $f(x) = \tan^{-1}(\frac{1}{\cos x})$, dove \tan^{-1} è la determinazione usuale dell'arcotangente. Poichè $f \in L^1[-\pi, \pi]$, esistono i coefficienti di Fourier e $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_k a_k \cos(kx)$.

- 1) La successione $\{a_k\}$ appartiene a $\ell^1(\mathbb{C})$?
- 2) La successione $\{a_k\}$ appartiene a $\ell^2(\mathbb{C})$?

3) Si calcoli $\sum_1^\infty (-)^n a_{2n}$.

Svolgimento: La funzione f , essendo limitata, oltre che di L^1 è anche di L^2 . Essa può allora essere sviluppata in $L^2(\pi, \pi)$ e la norma in $\ell^2(\mathbb{C})$ della successione $\{a_k\}$ è espressa dalla norma di f in $L^2(-\pi, \pi)$ (Parseval). La risposta alla seconda domanda è quindi affermativa.

Veniamo alla prima domanda: se $\{a_n\}$ appartenesse a $\ell^1(\mathbb{C})$ la serie di Fourier convergerebbe uniformemente (Criterio di Weierstrass: le somme parziali della serie sono limitate in modulo da $\frac{1}{2}|a_0| + \sum_k |a_k| \leq \|\{a_k\}\|_1$). Trattandosi di una serie di coseni, la somma sarebbe una funzione continua. Chiediamoci quale relazione sussiste in questo caso tra la somma della serie e la funzione f . La funzione compone una funzione continua limitata, l'arcotangente, con una funzione che ha asintoti verticali in $x = \pi/2$ e $x = -\pi/2$. Il risultato è che f ha discontinuità del primo ordine in tali punti, dove effettua un "salto" di $\pm\pi$. Per il teorema di Dini possiamo affermare che la serie converge a $f(x)$ in tutti i punti tranne in $x = \pm\pi/2$, dove invece converge alla media aritmetica della discontinuità, cioè a zero. Quindi la serie converge ad una funzione discontinua, e perciò la convergenza non può essere uniforme: la risposta alla prima domanda è negativa.

Per l'ultima domanda consideriamo la serie proprio in $x = \pi/2$:

$$\sum a_k \cos(k\pi/2) = \sum a_{2k} \cos(k\pi) = \sum a_{2k} (-)^k = \frac{1}{2}[f(\frac{\pi^+}{2}) + f(\frac{\pi^-}{2})] = 0.$$

Esercizio 6. Si consideri in $L^2(\mathbb{R})$ la famiglia di operatori A_t , $t > 0$, con dominio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$A_t f = g_t * f, \quad g_t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp(-\frac{x^2}{4t})$$

- 1) Si discuta se la definizione è ben posta.
- 2) Si dimostri che A_t è limitato sul suo dominio (e può quindi univocamente estendersi a tutto lo spazio, sia A'_t tale estensione)
- 3) Si dimostri che $\|A'_t f\|_2 \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$, ma $\|A'_t\| \not\rightarrow 0$.

Svolgimento: La prima domanda chiede evidentemente di provare che $A_t f \in L^2$. Notiamo che g è una funzione a "decrecenza rapida", la convoluzione di funzioni a decrecenza rapida continua ad esserlo, e quindi è sicuramente in L^2 . Per il teorema sulla trasformata della convoluzione abbiamo $(\mathcal{F} A_t f)(k) = \sqrt{2\pi} \tilde{g}_t(k) \tilde{f}(k)$. Per il noto teorema $\tilde{g}_t(k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e con un semplice calcolo si ha $\tilde{g}_t(k) = \exp(-tk^2)$. \tilde{g}_t è reale limitata (da 1), quindi

$$\|A_t f\|_2^2 = \|\mathcal{F} A_t f\|_2^2 = 2\pi \int dk |\tilde{f}(k)|^2 e^{-2tk^2} \leq 2\pi \|\tilde{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2.$$

Per discutere gli ultimi due punti occorre avere la formula per $\|A'_t f\|$. Se f è nel dominio sappiamo che la formula si esprime con $\|A'_t f\|_2 = \|\tilde{G}_t f\|_2$, dove \tilde{G}_t è l'op. di moltiplicazione per $\sqrt{2\pi} \tilde{g}_t$, operatore come detto limitato. Sappiamo che il dominio è denso nello spazio. Sia f_n una successione nel dominio convergente a

$f \in L_2$, poichè la norma è una funzione continua a valori reali possiamo scrivere

$$\|A'_t f\|_2 = \|\lim A_t f_n\|_2 = \lim \|A_t f_n\|_2 = \lim \|\tilde{G}_t \tilde{f}_n\| = \|\tilde{G}_t \tilde{f}\|$$

dove abbiamo usato la continuità della trasf. di Fourier e la continuità della norma: la formula continua a valere per $f \in L^2$.

A questo punto per il teorema della convergenza dominata (la maggiorante integrabile è proprio $2\pi|\tilde{f}|^2$) concludiamo $\|A'_t f\|_2 \rightarrow 0$.

L'esponenziale contenuto in $\|\tilde{G}_t \tilde{f}\|$ farebbe forse intuire che la convergenza a zero è in norma, ma non è così. Prendiamo per semplicità $t = n^2$ e consideriamo $\tilde{f}_n = \chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$ (una funzione caratteristica). Allora $\|A'_{n^2}\| \geq \frac{\|A'_{n^2} \tilde{f}_n\|}{\|\tilde{f}_n\|}$, e $\|A'_{n^2} \tilde{f}_n\|_2^2 = 2\pi \int_{1/(n+1)}^{1/n} dk e^{-2n^2 k^2} \geq 2\pi(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})\frac{1}{e^2}$, $\|\tilde{f}_n\|_2^2 = 2\pi(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ otteniamo quindi un limite inferiore $\|A'_{n^2}\| \geq 1/e$.

Esercizio 7. Sullo spazio di Hilbert $L^2(Q)$, dove $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, si consideri l'operatore di moltiplicazione

$$(Af)(x, y) = (x + iy)f(x, y)$$

- 1) Si dimostri che A è un operatore limitato e si calcoli $\|A\|$.
- 2) Si determini l'aggiunto A^\dagger .

Svolgimento: $\int_Q dx dy (x^2 + y^2)|f(x, y)|^2 \leq 2 \int_Q dx dy |f(x, y)|^2$, l'op. è quindi limitato e la sua norma non supera $\sqrt{2}$. Mostriamo che la norma dell'operatore vale proprio $\sqrt{2}$. L'idea intuitiva è: se prendiamo una funzione concentrata attorno allo spigolo $(1, 1)$ del quadrato Q , riusciremo ad ottenere $\sqrt{2}$ come limite inferiore alla norma, che allora deve proprio valere $\sqrt{2}$. Prendiamo allora la successione χ_{Q_n} di funzioni caratteristiche dei quadrati $Q_n = [1 - \frac{1}{n}, 1] \times [1 - \frac{1}{n}, 1]$. Si ha:

$$\|A\chi_{Q_n}\|^2 = \int_Q dx dy |A\chi_{Q_n}(x, y)|^2 = \frac{2}{n} \int_{1-\frac{1}{n}}^1 x^2 dx = \frac{2}{n^2} (1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2})$$

mentre $\|\chi_{Q_n}\|^2 = \int_Q dx dy \chi_{Q_n}(x, y)^2 = 1/n^2$. Il loro rapporto converge a 2. Per l'ultima domanda abbiamo:

$$\int_Q dx dy \overline{g(x, y)}(x + iy)f(x, y) = \int_Q dx dy \overline{(x - iy)g(x, y)}f(x, y)$$

L'aggiunto è quindi l'operatore di moltiplicazione per $x - iy$.

Esercizio 8. Si consideri sul $L^2[-\pi, \pi]$ l'operatore lineare

$$(Pf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [4 \cos^2(x - y) - 1]f(y)dy$$

- 1) Si dimostri che P è un proiettore ortogonale.
- 2) Si discuta la risolubilità dell'equazione $(Pf)(x) = \alpha + \beta \sin x + \gamma \cos x$.

Svolgimento: Consideriamo questo problema prima in maniera più generale e “cieca”, e poi in maniera più specifica e “furba” (la maniera attesa da parte degli studenti). Consideriamo allora l’operatore $(Kf)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x-y)f(y)dy$ dove la funzione K ha periodo 2π e appartiene a $L^2(-\pi, \pi)$. Usando la disuguaglianza di Holder e la periodicità di K otteniamo $|(Kf)(x)|^2 \leq \|K\|^2 \|f\|_2^2$. Pertanto $|(Kf)(x)|$ è limitata ed è certamente in L^2 . Nel nostro caso le ipotesi su K sono soddisfatte e il problema è ben posto.

Sappiamo che idempotenza e hermitianità sono necessarie e sufficienti all’essere un proiettore.

$(g, Kf) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \bar{g}(x) \int_{-\pi}^{\pi} K(x-y)f(y)dy = \int_{-\pi}^{\pi} dy f(y) [\int_{-\pi}^{\pi} dx g(x) \bar{K}(x-y)]^*$, e se $\bar{K}(x-y) = K(y-x)$ l’operatore è Hermitiano. Nel nostro caso la cosa è verificata a vista.

Per l’idempotenza osserviamo che $K(Kf)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x-y)(Kf)(y)dy = \int_{-\pi}^{\pi} dy K(x-y) \int_{-\pi}^{\pi} K(y-z)f(z)dz$. L’idempotenza è certamente soddisfatta se $\int_{-\pi}^{\pi} dy K(x-y)K(y-z) = K(x-z)$.

Nel nostro caso il calcolo, concettualmente banale, si semplifica se scriviamo $4 \cos^2 u - 1 = 2 \cos(2u) + 1$, e si perviene alla verifica attesa.

La strada più veloce parte dal fatto che sappiamo che un proiettore si scrive come $Pf = \sum u_n(u_n, f)$ dove gli u_n sono un s.o.n.c. nello spazio di proiezione. Con questo modello in testa risulta naturale scrivere

$$\frac{4 \cos^2(x-y) - 1}{2\pi} = \frac{2 \cos(2(x-y)) + 1}{2\pi} = \frac{\cos(2x) \cos(2y)}{\pi} + \frac{\sin(2x) \sin(2y)}{\pi} + \frac{1}{2\pi}$$

Vediamo che le funzioni u_n sono $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(2x)$ e $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(2x)$.

La domanda sulla condizione di solubilità dell’equazione ha risposta quindi $\alpha = \text{arbitrario}$, $\beta = \gamma = 0$.

Esercizio 9. Si consideri lo spazio $H(\mathbb{C})$ delle funzioni intere, e si ponga $\|f\| = \sup_{|z| < 1} |f(z)|$.

- 1) Si dimostri che è una norma.
- 2) Si dimostri che rispetto a questa norma lo spazio non è completo.
- 3) Definito l’operatore lineare $(Sf)(z) = \int_0^z f(\zeta)d\zeta$, dove l’integrale è calcolato lungo un qualsiasi cammino congiungente l’origine al punto z , si dimostri che S è limitato.
- 4) L’operatore S è invertibile? L’inverso è limitato?

Svolgimento: L’unico requisito non banale da mostrare è $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$. Se $\|f\| = 0$ certamente la funzione è nulla nel cerchio unitario, poichè gli zeri delle funzioni olomorfe non possono avere punti di accumulazione a meno che non siano nulle, segue che f è nulla.

Consideriamo ora la successione di funzioni intere $g_n(z) = \sum_0^n (z/2)^k$. Essa converge uniformemente nel suo cerchio di convergenza, che contiene quello unitario, a $\frac{2}{2-z}$, quindi è una successione di Cauchy rispetto alla norma. Tuttavia, per le proprietà delle funzioni olomorfe, non esiste nessuna funzione intera uguale nel cerchio unitario a $\frac{2}{2-z}$.

Per il terzo punto: Sf è ben definito in quanto il teorema di Cauchy assicura che l'integrale non dipende dal cammino scelto. Considerando un cammino radiale ed applicando la disuguaglianza di Darboux otteniamo: $\|Sf\| \leq \|f\|$.

L'immagine dell'operatore S è costituito da tutte le funzioni intere che si annullano nell'origine; se infatti $f(0) = 0$ esiste $g(= f')$, tale che $f(z) = \int_0^z g(\zeta)d\zeta$. Derivando entrambi i membri scopriamo che l'inverso è proprio l'operatore di derivazione D , agente sulle funzioni intere, quindi $S^{-1} \subset D$.

S^{-1} non è limitato, consideriamo ad esempio $f_n(z) = z^n$, $n=1,2,..$. Tali funzioni stanno nel range di S , $S^{-1}f_n(z) = Df_n(z) = nz^{n-1}$. $\frac{\|S^{-1}f_n\|}{\|f_n\|} = n \rightarrow \infty$.

(negli spazi infinito-dimensionali l'inverso di operatori continui, se esiste, non è in generale continuo)

Esercizio 10. Nello spazio $L^2(-\pi, \pi)$ si definisce un operatore di derivazione P in questo modo:

$$\mathcal{D}(P) = \{f \in L^2(-\pi, \pi) \text{ t.c. } f \in \mathcal{C}^1[-\pi, \pi], f(-\pi) = f(\pi)\}, \quad (Pf)(x) = -if'(x)$$

(P è l'operatore "momento" nella rappresentazione di Schrödinger per una particella confinata).

- 1) Si dimostri che il dominio dell'operatore è denso nello spazio,
- 2) che P non è limitato, e che sul suo dominio P è simmetrico.
- 3) Si determini l'operatore aggiunto P^\dagger .
- 4) Si estenda il dominio dell'operatore in modo che risulti autoaggiunto.
- 5) Sapreste discutere le modifiche necessarie per avere una condizione di periodicità generalizzata del tipo $f(\pi) = f(-\pi) \exp(i\theta)$ (θ reale)?

Svolgimento: per il primo punto la cosa più veloce è osservare che il s.o.n.c. di Fourier $\{u_n(x) = \frac{\exp(inx)}{\sqrt{2\pi}}\}_{-\infty}^{+\infty}$ è contenuto nel dominio. Da $\|Pu_n\| = n$ consegue che P non è limitato.

Simmetria: se f e g sono nel dominio allora

$$(g, Pf) = -i \int dx \bar{g}(x) f'(x) = -i \bar{g}(x) f(x) \Big|_{-\pi}^{+\pi} + i \int dx \bar{g}'(x) f(x) = (Pg, f)$$

abbiamo effettuato una integrazione per parti ed usato il fatto che per la condizione di periodicità il termine di bordo si annulla.

Il dominio dell'aggiunto è costituito dalle funzioni $f \in L^2$ per cui esiste un'altra funzione $h \in L^2$, tale che per tutte le $g \in \mathcal{D}(P)$ sia $(f, Pg) = (h, g)$.

Consideriamo intanto come g proprio il s.o.n.c. di Fourier, allora: $n(f, u_n) = (h, u_n)$. f deve essere tale che esista h , cioè $\|h\|^2 = \sum n^2 |(u_n, f)|^2 < \infty$. Questa sarebbe una condizione necessaria, ma d'altra parte è chiaro che se è soddisfatta allora esiste $h = \sum n(u_n, f)u_n = P^\dagger f$. Non è evidente da questa espressione che $P \subset P^\dagger$ ma è così. Se infatti f è nel dominio sia f che f' sono sviluppabili sul s.o.n.c., $f = \sum (u_n, f)u_n$ e $-if' = \sum (u_n, -if')u_n$, ma integrando per parti per la periodicità $(u_n, -if') = n(u_n, f)$ e quindi la condizione $\sum |n(u_n, f)|^2 < \infty$ è soddisfatta.

Per la determinazione dell'aggiunto abbiamo usato del dominio di P solo il fatto

che contiene gli u_n , se allora consideriamo come dominio quello di P^\dagger , abbiamo che è autoaggiunto. Per il P originario è cioè verificato $P \subset P^\dagger = P^{\dagger\dagger}$.

Nella discussione ha giocato un ruolo fondamentale il s.o.n.c. di Fourier, che però non soddisfa la condizione di periodicità modificata. Consideriamo però le funzioni $v_n(x) = \exp(i\frac{\theta(x+\pi)}{2\pi})u_n(x)$, vale $v_n(\pi) = \exp(i\theta)v_n(-\pi)$, sono cioè nel dominio modificato, e formano un s.o.n.c., infatti poichè le u_n lo sono, se per ogni n vale $(v_n, f) = 0$ abbiamo $\exp(-i\frac{\theta(x+\pi)}{2\pi})f(x) = 0$, cioè $f = 0$. La discussione segue la falsariga di quella appena fatta, in particolare l'operatore continua ad essere simmetrico; occorre solo osservare che mentre avevamo nelle formule $Pu_n = nu_n$, per il nuovo operatore abbiamo $P_\theta v_n = (n + \theta)v_n$, tutte le formule vanno modificate di conseguenza. Gli operatori P_θ definiti hanno differenti autovalori, non sono quindi unitariamente equivalenti, e dal punto di vista dell'uso in meccanica quantistica sono inequivalenti. D'altra parte non c'è un modo per tenere un elettrone confinato rigorosamente in un intervallo (lastrina, cubetto).

Gli operatori analizzati descrivono il momento in una qualche approssimazione, che "il fisico" ritiene ragionevole, non esistono questioni di principio; altre volte ritenere la particella confinata è una finzione matematica inessenziale in un qualche limite (ad esempio nel cosiddetto limite termodinamico) etc. etc.