

Metodi Matematici della Fisica 30 gennaio 2020

Esercizio 1) Si determini per la funzione $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ l'integrale improprio

$$\hat{f}(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) \exp(-ikx) \quad k \in \mathbb{R}_0$$

Inoltre, facoltativamente, si discuta la relazione del risultato con la trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$ (detta di Fourier-Plancherel) della funzione f .

Esercizio 2) Si indichino tutte le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{\text{Log}(1+z)}{e^{2z} + e^z - 2}$$

Per le singolarità isolate nella striscia $|\text{Im}z| < 2\pi$ si determini la parte principale dello sviluppo di Laurent e il raggio di convergenza.

Esercizio 3) Nello spazio di Hilbert $\ell^2(\mathbb{C})$ si consideri l'operatore

$$Q : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) \rightarrow (x_2, x_3, x_1, x_5, x_6, x_4, \dots)$$

che permuta cioè ciclicamente le componenti del vettore a gruppi di tre.

Q è isometrico? È anche unitario?

Si calcoli il risolvente $R_z = (z - Q)^{-1}$. Per quali z esiste?

Esercizio 4) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{e^{-|x-y|}}{y^2 + 1}$$

1) Cosa possiamo affermare circa le proprietà della sua trasformata di Fourier?

2) Calcolare la trasformata di Fourier.

Esercizio 5) Si consideri il funzionale definito sullo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dalla formula

$$\varphi \rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \text{Log}(x + i\epsilon) \varphi(x)$$

Si dimostri che la formula definisce una distribuzione e se ne calcoli la derivata in termini di distribuzioni note. La distribuzione e la sua derivata sono regolari?

(può essere utile osservare che $1 \leq \frac{x^2 + \epsilon^2}{x^2} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2}$ per $\epsilon \leq 1$)