

Metodi Matematici della Fisica

23 settembre 2019

(Lo studente è invitato a svolgere 4 esercizi a scelta)

Esercizio 1) Sia $\gamma(R)$ la semicirconferenza $\{z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Si calcoli

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(R)} dz \frac{\exp(-i\pi z)}{z^2 - 2z + 2}.$$

Esercizio 2) Determinare lo sviluppo in serie di potenze attorno a $z = 0$, e gli sviluppi in serie di Laurent con centro in $z = 0$, per la funzione $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z - 3}$. Si specifichino i relativi raggi di convergenza.

Esercizio 3) Nello spazio \mathcal{H} delle matrici complesse $n \times n$ con prodotto interno $(B, A) = \text{Tr}(B^\dagger A)$ si consideri l'operatore lineare $\hat{K} : A \rightarrow [Q, A]$, dove Q è una fissata matrice $n \times n$.

i) Determinare l'operatore \hat{K}^\dagger , è iniettivo?

ii) Si dimostri $\text{Ran}(\hat{K}) \neq \mathcal{H}$.

iii) Si consideri ora il caso in cui la matrice Q è hermitiana: mostrare che gli autovalori di \hat{K} sono $\lambda_i - \lambda_j$, dove $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ è lo spettro della matrice Q ; nel caso in cui tutti gli autovalori di Q siano non-degeneri determinare la dimensione del nucleo di \hat{K} .

Esercizio 4) Si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ della funzione definita dalla formula $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-y^2)}{1+(x-y)^2} dy$.

Esercizio 5) Sullo spazio delle funzioni a decrescenza rapida $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si consideri il funzionale

$$\varphi \rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{(-\infty, -\epsilon) \cup (2\epsilon, \infty)} \frac{\varphi(x)}{x}$$

Definisce una distribuzione? Sta in qualche semplice relazione con l'usuale "parte principale"?