Metodi Matematici della Fisica
19 giugno 2019
(Lo studente è invitato a svolgere 4 esercizi a scelta)

Esercizio 1) Calcolare l'integrale $\int_0^\infty dx \frac{1}{(x+1)^2} x^{2/3}$.

Esercizio 2). i) Dimostrare l'affermazione: "per una matrice $n \times n$ complessa O la norma sup coincide con $\sqrt{\lambda_M}$, dove λ_M è l'autovalore massimo della matrice $O^\dagger O$".
ii) In alternativa, verificare che l'affermazione è vera per la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3) In $\mathrm{L}^2(-\pi, \pi)$ si consideri l'operatore $(Tf)(x) = f''$ sul dominio $\mathscr{D}(T) = \{f \in \mathscr{C}^2[-\pi, \pi] :\ f(-\pi) = f(\pi),\ f'(-\pi) = f'(\pi)\}$.
i) Si determinino autovalori ed autovettori di T.
ii) L'operatore T è limitato sul suo dominio?
iii) Esiste l'operatore aggiunto di T?
iv) Per quali valori di z esiste $(zI - T)^{-1}$?

Esercizio 4)
Si consideri trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ della funzione $f(x) = (1 + x^2)^{-2}$. Cosa sapete dire "a priori" del suo andamento per grandi k? E dell'esistenza e della regolarità di $\hat{f}'(k)$, $\hat{f}''(k)$ etc?
Si calcoli $\hat{f}(k)$ e si controlli se il risultato rispetta le attese.

Esercizio 5)
Disegnare i fogli di Riemann della seguente funzione polidroma e scriverne la forma polare:

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/3}$$

Esercizio 6)
i) Determinare la trasformata di Fourier della distribuzione $P\frac{1}{x+b}$.
ii) Data la distribuzione $T_b = \frac{1}{b}(P\frac{1}{x+b} - P\frac{1}{x})$, trovare $\lim_{b\to 0} \mathscr{F} T_b = \hat{T}$ e una espressione conveniente per $\mathscr{F}^{-1}\hat{T} \equiv T$.
iii) Calcolare $\langle T |\exp(-x^4)\rangle$ (si esprima il risultato mediante la Gamma di Eulero).