

Metodi Matematici della Fisica

19 luglio 2019

(Lo studente è invitato a svolgere 4 esercizi a scelta)

Esercizio 1) Calcolare l'integrale $\int_0^{\pi/2} dx e^{-i\pi \tan x}$.

Esercizio 2) Si calcoli lo sviluppo di Fourier in $L^2(-\pi, +\pi)$ della funzione $f(x) = \cos(ax)$, con $a \in \mathbb{C}$.

Cosa vuol dire che la serie converge a f in L^2 ? La serie converge anche puntualmente?

Facoltativamente, si ottenga da questo risultato uno sviluppo in serie di funzioni razionali per le funzioni $1/\sin(z)$ e $\cot(z)$. Si determini e si giustifichi un analogo sviluppo per $1/\sin^2(z)$.

Esercizio 3). Si consideri l'inversione complessa $I(z) = 1/z$.

(i) Dimostrare che le relazioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte in $z \neq 0$ e mostrare esplicitamente che la derivata è $-1/z^2$.

(ii) Data la mappa $w = I(z)$, trovare l'immagine della retta di equazione $z(t) = i + it^3$, $t \in \mathbb{R}$. Cosa si può dire del modulo e della direzione dei vettori tangenti alla curva $I(z(t))$?

Esercizio 4) In $L^2(0, 1)$ si consideri l'operatore $T = i \frac{d}{dx}$ con dominio sulle funzioni $\mathcal{C}^1[0, 1]$ con condizione al contorno $f(1) = \alpha f(0)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

i) Per α generico, trovare autovettori e autovalori di T . Sono gli autovettori ortogonali?

ii) Per quali valori di α risulta che T è simmetrico, cioè:

$$(Tf|g) = (f|Tg) \quad \forall f, g \in \text{dominio?}$$

iii) Per tali valori di α il dominio di T è denso in $L^2(0, 1)$?

Esercizio 5) Si consideri la successione di funzioni $\delta_n(x) = n$ per $|x| \leq \frac{1}{2n}$ e $\delta_n(x) = 0$ altrove, $n = 1, 2, \dots$

(i) La successione è convergente in $L^1(\mathbb{R})$?

(ii) La successione è convergente in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$? (Motivare le risposte).