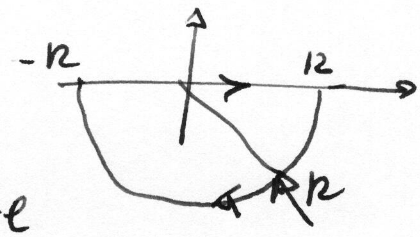
Compito del 19-7-2019 (Molinari-Raciti)

1) $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \exp(-i\pi \tan x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \frac{e^{-i\pi t}}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \frac{\cos\pi t}{1+t^2}$

dove si è posto $t=\tan x$. L'ultima espressione mostra che il risultato deve essere reale.

Consideriamo il cammino $\gamma(R)$:



si è scelto di "chiudere da sotto" il segmento $[-R, -R]$ perché, ai fini dell'applicazione del lemma di Jordan, l'esponenziale deve avere una parte reale <u>negativa</u> nella semicirconf.

Per il lemma di Jordan concludiamo quindi

$$I = (-)2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-i} \frac{e^{-i\pi z}}{1+z^2} = -2\pi i \, \frac{e^{-\pi}}{-2i} = \pi e^{-\pi}.$$

Il segno $(-)$ è dovuto all'indice negativo del cammino.

2) $f(x) = \cos ax \quad a \in \mathbb{C}$.

osserviamo che $f \in L^2[-\pi, \pi]$ ed è pari, quindi

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos kx$$ e la serie converge in L^2

essendo il sistema di Fourier un s.o.n.c. in $L^2[-\pi, \pi]$.

calcoliamo $$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos ax \cos kx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \cos ax \cos kx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx \left[\cos(ax - kx) + \cos(ax + kx) \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin(a-k)x}{a-k} - \frac{\sin(a+k)x}{a+k} \right\}_0^{\pi} =$$

$$= \frac{(-)^k}{\pi} \sin a\pi \left\{ \frac{1}{a-k} - \frac{1}{a+k} \right\} = \frac{(-)^k}{\pi} \frac{2a \sin a\pi}{a^2 - k^2}$$

Quindi in L^2

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{\pi a} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-)^k \cos kx}{a^2 - k^2}$$

si è pensato a non intero, caso banale in cui f coincide con il suo sviluppo di Fourier. La convergenza in L_2 comporta

$$\lim_{N \to \infty} \int \left| \cos ax - \sum_{k=0}^{N} \dots \right|^2 dx = 0.$$

Convergenza puntuale:

$$\left|\frac{\cos kx}{a^2-k^2}\right| \le \frac{C}{k^2} \qquad \text{per } k \to \infty$$

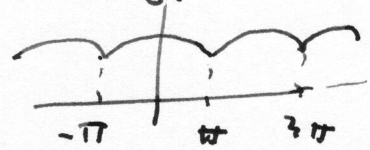
la serie converge assolutamente ed uniformemente ad una funzione che è quindi ovunque continua.

Il limite è $\cos ax$?

Per $x \in (-\pi,\pi)$ certamente sì per il Teorema di Dini, che possiamo applicare essendo f derivabile.

in $x = -\pi$ e $x = \pi$ f non è derivabile:

Fig.



Essendo come detto la somma della serie continua, ed essendo $\cos ax$ continua, l'uguaglianza tra le due deve valere anche in $\pm\pi$.

Alternativamente poiché in $x = \pm\pi$ le derivate destra e sinistra esistono, possiamo applicare il teorema di Dini nella forma più generale e concludere che la somma della serie in, es. $x = \pi$, vale $\frac{1}{2}\left(f(\pi^-)+f(\pi^+)\right) = \cos a\pi$

f è quella riprodotta in Fig.

parti facoltative:

per $x=0$ si ottiene:

$$1 = \frac{\sin a\pi}{\pi a} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_{1}^{\infty} (-)^k \frac{1}{a^2-k^2}$$

posto $a\pi \equiv z$ si ottiene

$$1 = \frac{\sin z}{z} + 2\,\frac{z}{\pi^2} \sin z \sum_{1}^{\infty} \frac{(-)^k}{\frac{z^2}{\pi^2} - k^2}$$

da cui

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{1}^{\infty} \frac{(-)^k}{z^2 - \pi^2 k^2}$$

valutando la serie in $x=\pi$ invece che in $x=0$ si ottiene lo sviluppo di $\cot z$ del tutto analogo.

Si dimostra che i due sviluppi convergono uniformemente nell'intorno di qualsiasi z_0, con $z_0 \neq k\pi$, $\forall k$. è possibile allora derivare termine a termine, in particolare la serie di $\cot z$, poiché $\frac{d}{dz} \cot z = \frac{-1}{\sin^2 z}$ rispondiamo anche all'ultima domanda.

3) $I(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

i)

$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$

le eq. di Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$

sono elementarmente verificate.

Poiché u e v sono differenziabili come funzioni di $\mathbb{R}^2$, tranne che $x=y=0$, si ha che $I(z)$ è olomorfa tranne in $z=0$. Prendendo l'incremento dz reale:

$$\frac{dI(z)}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{z^2}$$

ii)

$z(t) = i + it^3$ rappresenta la retta dei numeri immaginari, lo stesso vale per $\frac{1}{z(t)}$, cioè la retta è portata in se stessa.

i nuovi vettori tangenti sono:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{z(t)} = -\frac{1}{z^2(t)}\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z^2(t)}3it^2$$

la parte $\frac{1}{z^2(t)}$ è comune all'immagine di ogni curva per posizione $z_0 = z(t)$ per un qualche t.

$\frac{dz}{dt}$ è specifico della nostra curva, dipende dalla "velocità" con cui si passa da $z(t)$ per un qualche t.

l'applicazione $\frac{dz}{dt} \mapsto -\frac{1}{z^2(t)} \frac{dz}{dt}$ esprime

la relazione tra i vettori tangenti della vecchia curva

e di quella "mappata".

Il modulo viene moltiplicato per $\left| \frac{1}{z^2(t)} \right|$

e si ha poi una rotazione di $\arg\left(-\frac{1}{z^2(t)}\right)$.

4)

i) eq. agli autovalori : $i f' = \lambda f \Rightarrow f(x) = c \exp(-i\lambda x)$

la condizione al contorno $f(1) = \alpha f(0) \Rightarrow e^{-i\lambda} = \alpha$

$-i\lambda = \log\alpha \qquad \lambda = i \log\alpha$

$\log\alpha$ sono infiniti numeri, possiamo rendere esplicito

ciò scrivendo $\lambda_n = i \operatorname{Log}\alpha + 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}$

e corrispondentemente $f_n(x) = e^{x \operatorname{Log}\alpha} \, e^{-2\pi i n x}$

in generale $\operatorname{Log}\alpha \in \mathbb{C}$ $\quad \int_0^1 \bar{f}_m f_n \, dx = \int_0^1 dx \, e^{2x \operatorname{Re}(\operatorname{Log}\alpha)} \exp 2\pi i (m-n) x$

non sono ortogonali a meno che $\operatorname{Re}(\operatorname{Log}\alpha) = 0$

cioè $|\alpha| = 1$.

ii) $\int \overline{(Tf)} g = \int \bar{f} \, Tg \Rightarrow -i \int \bar{f}' g = i \int \bar{f} g'$

$\Rightarrow \int \frac{d}{dx}(\bar{f} g) = 0 \Rightarrow \bar{f}(1) g(1) = \bar{f}(0) g(0)$

$\Rightarrow |\alpha|^2 \bar{f}(0) g(0) = \bar{f}(0) g(0) \Rightarrow |\alpha| = 1$

La simmetria richiede $|\alpha| = 1$, in questo caso gli autovettori del punto i) sono mutuamente ortogonali

Per tali valori di α $f_n(x) = e^{i\theta x} e^{-2\pi i n x}$,

con $e^{i\theta} = \alpha$.

Notiamo che gli f_n si ottengono con una trasformazione banalmente unitaria ($f \mapsto e^{i\theta x} f$) nel s.o.n.c. di Fourier in $L^2[0,1]$. Quindi le f_n sono ancora un s.o.n.c.

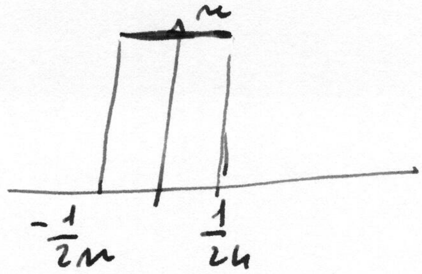
Oss: per α arbitrario le $f_n = e^{x \log\alpha} e^{-2\pi i n x}$ sono comunque ~~un s.o.n.c.~~ dense. Infatti sia $(f_n, f) = 0$ $\forall n$.

$$\int e^{x \overline{\log\alpha}} e^{2\pi i n x} f(x)\, dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

$e^{x \overline{\log\alpha}}$ è limitato (e continuo) in $x \in (0,1)$, se $f \in L^2[0,1]$ anche $e^{x \overline{\log\alpha}} f$ è in L^2. Poiché $\{e^{2\pi i n x}\}$ formano un s.o.n.c. otteniamo che $e^{x \overline{\log\alpha}} f = 0$

$\Rightarrow f = 0$.

5) $\delta_n(x)$:



se $m > n$ $\quad \delta_m(x) - \delta_n(x)$ vale $-n$ per

$$x \in \left[-\frac{1}{2n}, -\frac{1}{2m}\right] \cup \left[\frac{1}{2m}, \frac{1}{2n}\right] \equiv I_{n,m}$$

allora $$\|\delta_m - \delta_n\|_{L1} \geq n \int_{I_{n,m}} dx = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)$$

$$= 1 - \frac{n}{m}$$

domanda: può essere $\forall\, n,m > \nu_\varepsilon$ che $\|\delta_n - \delta_m\|_1 < \varepsilon$?

basta prendere $m = 2n$ per avere $\|\delta_{2n} - \delta_n\| > \frac{1}{2}$.

Quindi <u>non</u> si ha convergenza in L_1.

Si ha invece conv. in $S'(\mathbb{R})$. Infatti se $\varphi \in S(\mathbb{R})$

$$\langle f_n | \varphi \rangle = n \int_{-1/2n}^{1/2n} \varphi(x)\, dx = \int_{-1/2}^{1/2} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt$$

dove si è posto $nx = t$. Allora

$$\langle f_n | \varphi \rangle - \varphi(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt - \varphi(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right) dt$$

$$= \frac{1}{n} \int_{-1/2}^{1/2} t\, \frac{\varphi(t/n) - \varphi(0)}{t/n}\, dt = \frac{1}{n} \int_{-1/2}^{1/2} t\, \varphi'(u(t))\, dt$$

dove si è usato il T. di Lagrange e $|u(t)| \leq \left|\frac{t}{n}\right|$

Allora

$$\left| \langle f_n(\varphi) \rangle - \varphi(0) \right| \leq \frac{1}{n} \int_{-1/2}^{1/2} \left| t\, \varphi'(\xi_n(t)) \right| dt$$

$$\leq \frac{1}{2n} \int_{-1/2}^{1/2} \left| \varphi'(\xi_n(t)) \right| dt \leq \frac{1}{2n} \| \varphi \|_{0,1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Quindi $f_n \longrightarrow \delta_0$ = Delta di Dirac.

OSS: In maniera più veloce, ma concettualmente meno elementare, si poteva risolvere il punto ii) usando il teor. della conv. dominata.