Metodi Matematici della Fisica
19 febbraio 2019

Esercizio 1) Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^\infty dx \frac{1}{x^{2/3}(x+2)}$$

L'integrale chiuso sul cammino 'keyhole' è calcolato col residuo in polo semplice -2:

$$\oint dz \frac{e^{-\frac{2}{3}\log z}}{z+2} = 2\pi i\, e^{-\frac{2}{3}\log(-2)} = 2\pi i\, e^{-\frac{2}{3}(\log 2 + i\pi)}$$

Lo stesso integrale è valutato sul contorno, con contributo dal taglio percorso nei due sensi: $= I(1 - e^{-i\frac{4}{3}\pi})$. Pertanto:

$$I = \frac{2\pi i}{2^{2/3}} \frac{\exp(-i\frac{2}{3}\pi)}{1 - \exp(-i\frac{4}{3}\pi)} = \frac{2\pi i}{2^{2/3}} \frac{1}{2i \sin(\frac{2}{3}\pi)} = \pi \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$$

Esercizio 2) Nello spazio $\ell^2(\mathbb{C})$ l'operatore lineare T è definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...)$$

i) Si dimostri che l'operatore è limitato e se ne calcoli la norma.
$\|T\{x\}\|^2 = \sum_{j=2}^\infty |x_j|^2 = \|\{x\}\|^2 - x_1^2 \le \|\{x\}\|^2$ dunque T è limitato. In particolare si ha uguaglianza per gli elementi con prima componete nulla. Ne segue che $\|T\| = 1$.
ii) Si determinino autovalori ed autovettori di T.
L'equazione $T\{x\} = \lambda\{x\}$ è soddisfatta per $x_2 = \lambda x_1$, $x_3 = \lambda x_2$, ... cioè $x_k = \lambda^{k-1} x_1$. La successione $x_1\{\lambda^{k-1}\}$ appartiene a ℓ^2 se $|\lambda| < 1$ (si noti che, non essendo T autoaggiunto, lo spettro di autovalori non è solo reale e neppure numerabile).
iii) Gli autovettori generano un insieme denso nello spazio di Hilbert?
È sufficiente mostrare che se $\{x\}$ è ortogonale a tutti gli autovettori, allora $\{x\} = 0$. L'implicazione è vera: $\sum_{k=1}^\infty x_k^* \lambda^{k-1}$ è analitica nel disco unitario. Se è nulla per ogni λ allora $x_k = 0$ per ogni k.
iv) Cosa sapete dire (facilmente) sull'esistenza di $(zI - T)^{-1}$, $z \in \mathbb{C}$, come operatore di $\mathscr{B}(\ell_2(\mathbb{C}))$?
L'operatore $(zI - T)^{-1}$ esiste per $|z| > 1$, e non esiste per $|z| < 1$.

Esercizio 3). Si consideri lo spazio lineare delle matrici reali 2×2 munito del prodotto interno $(A,B) = \mathrm{tr}(A^T B)$ e, su tale spazio, si consideri l'operatore $\hat{K} : A \to \hat{K}A = I\, a_{1\,1}$, dove I è la matrice unità 2×2 e con $a_{i\,j}$ denotiamo gli elementi della matrice A.

i) Si verifichi che $\hat{K}$ è un operatore lineare limitato e se ne calcoli la norma.

La linearità è semplice. La norma: $\|\hat{K}A\|^2 = \|a_{11}I\|^2 = a_{11}^2 \mathrm{tr} I = 2a_{11}^2 \leq 2\|A\|^2$. Dunque $\hat{K}$ è limitato e si ha:

$$\|\hat{K}\| = \sup \frac{|a_{11}|\sqrt{2}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2}} = \sqrt{2}$$

ii) Si determini l'operatore aggiunto $\hat{K}^\dagger$.

Indichiamo con a'_{ij}, a_{ij} e b_{ij} gli elementi delle matrici $\hat{K}^\dagger A$, A e B. Esplicitiamo la relazione $(\hat{K}^\dagger A|B) = (A|\hat{K}B)\ \forall B$:

$$a'_{11}b_{11} + a'_{21}b_{21} + a'_{12}b_{12} + a'_{22}b_{22} = (a_{11} + a_{22})b_{11}, \quad \forall b_{ij}$$

Allora $a'_{21} = 0$, $a'_{12} = 0$ e $a'_{22} = 0$, ed è:

$$\hat{K}^\dagger A = (a_{11} + a_{22}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iii) Scelta una base ortonormale in questo spazio di matrici con prodotto interno, si determini la rappresentazione matriciale di $\hat{K}$.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nella base E_j una matrice è rappresentata da un vettore di $\mathbb{R}^4$. La matrice che rappresenta l'operatore $\hat{K}$ è 4×4:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4a). Trovare una soluzione dell'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(x-y)\, e^{-y^2} = -\frac{\sqrt{\pi}}{8} x e^{-\frac{3}{4}x^2}$$

La funzione compare in un integrale di convoluzione. Calcoliamo le trasformate di Fourier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ax^2-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \tag{1}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} x e^{-ax^2-ikx} = i\frac{d}{dk}\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}} = \frac{-ik}{(2a)^{3/2}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \tag{2}$$

Per il teorema di convoluzione:

$$\sqrt{2\pi}(\mathscr{F}f)(k)\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2}{4}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{8}\ \frac{-ik}{(3/2)^{3/2}} e^{-\frac{k^2}{3}}$$
$$(\mathscr{F}f)(k) = \frac{ik}{6\sqrt{6}} e^{-\frac{k^2}{12}} \Rightarrow \boxed{f(x) = xe^{-3x^2}}$$

Esercizio 4b) Mostrare che $< f_n|\varphi >= n\int_0^\infty e^{-n|x-1|}\varphi(x)dx$ è una distribuzione temperata per ogni intero $n > 0$.

Per ogni n la mappa è lineare e inoltre $| < f_n|\varphi > | \le \sup|\varphi| \int_0^\infty e^{-|x-1/n|} \le \|\varphi\|_{00}\ cost.$

Mostrare che $\lim_{n\to\infty} f_n = 2\delta_1$, in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

$$< f_n|\varphi >= \int_0^n dx e^{-x}\varphi(1-\frac{x}{n}) + \int_0^\infty dx e^{-x}\varphi(1+\frac{x}{n}) \quad \text{da cui:}$$
$$| < f_n - 2\delta_1|\varphi > | \le \int_0^\infty dx e^{-x}|\varphi(1-\frac{x}{n}) - \varphi(1)| + \int_0^\infty dx e^{-x}|\varphi(1-\frac{x}{n}) - \varphi(1)|$$
$$+ \int_n^\infty dx e^{-x}|\varphi(1-\frac{x}{n})|$$

Ciascun termine si annulla per $n \to \infty$.

In alternativa, l'integrazione per parti porta rapidamente alla soluzione:

$$< f|\varphi > = n\int_0^1 dx\, e^{n(x-1)}\varphi(x) + n\int_1^\infty dx\, e^{n(1-x)}\varphi$$
$$= 2\varphi(1) - e^{-n}\varphi(0) - \int_0^1 dx\, e^{n(x-1)}\varphi'(x) + \int_1^\infty dx\, e^{n(1-x)}\varphi'(x)$$

$$\Big|\int_0^1 dx\, e^{n(x-1)}\varphi'(x)\Big| \le \frac{1}{n}\sup|\varphi'(x)| \int_0^n e^{-x}$$
$$\Big|\int_1^\infty dx\, e^{n(1-x)}\varphi'(x)\Big| \le \frac{1}{n}\sup|\varphi'(x)| \int_0^\infty e^{-x}$$