# Metodi Matematici della Fisica
# 19 febbraio 2019

**Esercizio 1)** Calcolare l'integrale

$$\int_0^\infty dx \frac{1}{x^{2/3}(x+2)}$$

**Esercizio 2)** Nello spazio $\ell_2(\mathbb{C})$ l'operatore lineare $T$ è definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, ....) = (x_2, x_3, x_4, ....)$$

i) Si dimostri che l'operatore è limitato e se ne calcoli la norma.
ii) Si determinino autovalori ed autovettori di $T$.
iii) Gli autovettori generano un insieme denso nello spazio di Hilbert?
iv) Cosa sapete dire (facilmente) sull'esistenza di $(zI - T)^{-1}$, $z \in \mathbb{C}$, come operatore di $\mathscr{B}(\ell_2(\mathbb{C}))$?

**Esercizio 3)**. Si consideri lo spazio lineare delle matrici reali $2 \times 2$ munito del prodotto interno $(A, B) = \mathrm{tr}(A^T B)$ e, su tale spazio, si consideri l'operatore $\hat{K} : A \to \hat{K}A = I\, a_{11}$, dove $I$ è la matrice unità $2 \times 2$ e con $a_{i\,j}$ denotiamo gli elementi della matrice $A$.
i) Si verifichi che $\hat{K}$ è un operatore lineare limitato e se ne calcoli la norma.
ii) Si determini l'operatore aggiunto $\hat{K}^\dagger$.
iii) Scelta una base ortonormale in questo spazio di matrici con prodotto interno, si determini la rappresentazione matriciale di $\hat{K}$.

**Esercizio 4a)**
Trovare una soluzione dell'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(x-y)\, e^{-y^2} = -\frac{\sqrt{\pi}}{8} x e^{-\frac{3}{4}x^2}$$

**Esercizio 4b)**
Mostrare che $< f_n|\varphi >= n \int_0^\infty e^{-n|x-1|}\varphi(x)dx$ è una distribuzione temperata per ogni intero $n > 0$. Mostrare che $\lim_{n\to\infty} f_n = 2\delta_1$, in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.