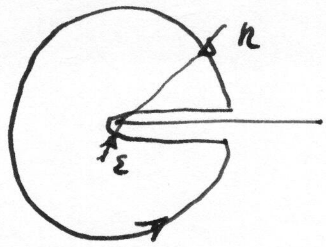
Esame 19-6-19

1) $\int_0^\infty dx \, \frac{x^{2/3}}{(1+x)^2} \equiv I$ considero



per $\varepsilon \to 0$ e $R \to \infty$ si arriva a

$$I\left(1 - e^{i\frac{4\pi}{3}}\right) = e^{-\frac{\pi i}{3}} \, 2i \sin\frac{\pi}{3} \; I = 2\pi i \; \mathrm{Res.}(z=-1)$$

calcoliamo il residuo di $f(z) = \frac{z^{2/3}}{(1+z)^2}$ in $z=-1$

$$f = \frac{1}{(1+z)^2}\left\{-1 + (z+1)\right\}^{2/3} = \frac{1}{(1+z)^2}\left\{(-1)^{2/3} + (z+1)\, g'(z=-1) + \dots\right\}$$

con $g(z) = z^{2/3}$ olomorfa lungo l'asse reale negativo.

Quindi

$$g'(z=-1) = \frac{2}{3} z^{-1/3}\Big|_{-1} = \frac{2}{3}(-1)^{-1/3} = \frac{2}{3} e^{-i\pi/3}$$

Perciò $\mathrm{Res}(z=1) = \frac{2}{3} e^{-i\pi/3}$

$$I = \frac{\frac{2}{3} e^{-i\pi/3} \, 2\pi i}{2i \sin\frac{\pi}{3} \, e^{-i\pi/3}} = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\sin \pi/3} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

2) $\|O\| = \sup_{\|\underline{x}\|=1} \|O\underline{x}\| = \sup_{\ldots} (\underline{x}^+ O^+ O \underline{x})^{1/2}$

$(O^+O)^+ = O^+O \Rightarrow$ può essere diagonalizzata: $\exists\, U : U^{-1} = U^+$:

$O^+O = U^+ D U$ con $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n)$ ~~diagonale~~

allora $\|O x\|^2 = \underline{x}^+ U^+ D U \underline{x} = \underline{y}^+ D \underline{y}$

con $\underline{y} = U \underline{x}$. Poiché $\|y\| = \|x\|$ per l'unitarietà di U,

abbiamo $\|O\| = \sup_{\|y\|=1} (y^+ D y)^{1/2}$

<u>oss</u>: gli autovalori di O, $\{\lambda_n\}_1^n$ sono numeri

reali <u>positivi</u>. Infatti sia $O^+O \underline{u} = \lambda \underline{u}$, allora

$\underline{u}^+ O^+ O \underline{u} = \lambda \|u\|^2 = \|Ou\|^2 \geq 0$ e quindi $\lambda \geq 0$.

allora $\underline{y}^+ D \underline{y} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |y_k|^2$ con $\sum |y_k|^2 = 1$

la quantità è massima quando il vettore $\underline{y}$ ha

componente uguale a 1 in corrispondenza dell'autovalore

massimo. (sia λ_1 l'autovalore massimo, allora

$(\lambda_1 \sum_1^n |y_k|^2 - \sum_1^n \lambda_k |y_k|^2 = \sum_1^n (\lambda_1 - \lambda_k) |y_k|^2 \geq 0$, ed

è nulla solo se $|y_k|^2 = 0$ per $k \neq 1$ e $|y_1|^2 = 1$)

2bis)

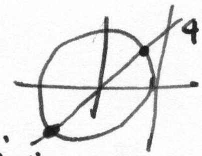
procedimento alternativo: sia $\underline{x} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ $\quad \|x\|=1 \quad \phi \in (-\pi, \pi)$

Allora

$$\|Ox\|^2 = 2(\cos\phi, \sin\phi)\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} = 2\left(\frac{13}{2} - \frac{3}{2}\cos 2\phi - 6 \sin 2\phi \right)$$

$$\frac{d}{d\phi}\|Ox\|^2 = \text{costante}\left(+3 \sin 2\phi - 12 \cos 2\phi \right) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\phi = 4$$

$$2\phi = \operatorname{tg}^{-1} 4 + k\pi \qquad k = 0, -1$$



per $k=-1$ sia $\sin 2\phi$ che $\cos 2\phi$ sono negativi: e lì è massimo

$$\|Ox\|^2 = 13 + 3 \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\phi}} + 12 \frac{\operatorname{tg} 2\phi}{\sqrt{1+\operatorname{tg} 2\phi}} = 13 + 3\sqrt{17}$$

Quindi $\|O\| = \sqrt{13+3\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{17}{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}$

che coincide effettivamente con il max. autovalore di O^tO.

3) $f'' = \lambda f \Rightarrow f = A e^{\sqrt{\lambda} x} + B e^{-\sqrt{\lambda} x}$

cond. al contorno $\begin{cases} A e^{\sqrt{\lambda}\pi} + B e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = A e^{-\sqrt{\lambda}\pi} + B e^{\sqrt{\lambda}\pi} \\ \cancel{\sqrt{\lambda}}\left(A e^{\sqrt{\lambda}\pi} - B e^{-\sqrt{\lambda}\pi}\right) = \cancel{\sqrt{\lambda}}\left(A e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - B e^{\sqrt{\lambda}\pi}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \cancel{A} e^{\sqrt{\lambda}\pi} = \cancel{A} e^{-\sqrt{\lambda}\pi} \qquad \cancel{B} e^{\sqrt{\lambda}\pi} = \cancel{B} e^{-\sqrt{\lambda}\pi}$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = n i \quad n \in \mathbb{Z} \qquad \{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sono gli autovettori

$\Downarrow$

$-\lambda = n^2$

alternativ[redacted] $\{\cos nx, \sin nx\}$ $n \in \mathbb{N}$, degenerazione doppia.

$\| T f_n \|^2 = \int n^2 \left|\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right| dx = n^2 \qquad \sup n^2 = \infty$

l'op non è limitato.

il sistema degli autovettori è il seno di Fourier, è il sistema completo in $L^2[-\pi, \pi]$ e quindi allora il dominio di T è denso in

l'aggiunto esiste.

Per $z \neq n^2$ $\quad z - T$ non ha l'autovalore nullo e quindi in senso algebrico l'inverso esiste (l'operatore è iniettivo) che era la domanda (nulla di più!)

41

$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} \in L_1$ e notiamo che tutte

le derivate di f, di qualsiasi ordine, esistono e sono di $L^1(\mathbb{R})$.

Segue che allora per $k \to \infty$ $\hat{f}$ deve annullarsi più

velocemente di qualsiasi potenza k^{-n} $n = 0, 1, 2 \ldots$

$$\hat{f}(k) = \int \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky} \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

usando il T. della conv. dominata deduciamo subito

$$\hat{f}'(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \frac{-ix}{(1+x^2)^2} e^{-ikx} \qquad \hat{f}''(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-ix)^2}{(1+x^2)^2} e^{-ikx}$$

le funzioni integrande sono di $L^1(\mathbb{R})$, quindi $\hat{f}'$ e $\hat{f}''$

oltre ad esistere sono continue e tendono a zero per $k \to \infty$.

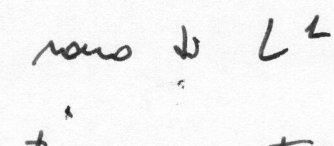
Nulla si può dire, a priori, delle derivate d'ordine superiore.

procediamo con il calcolo.

$$\hat{f}(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \frac{1}{(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos kx}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \hat{f}(k) = \hat{f}(-k)$$

consideriamo allora il caso $k < 0$ ed il cammino nel

piano complesso



per $R \to \infty$

possiamo applicare il Lemma di Jordan ed ottenere

$$\hat{f}(k) = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-ikz}}{(1+z^2)^2}, z=i\right)$$

$$\frac{e^{-ikz}}{(1+z^2)^2} = e^{-ikz}\left[\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{-i+z} - \frac{1}{i+z}\right)\right]^2 =$$

$$= -\frac{1}{4} e^{k} e^{-ik(z-i)} \left\{ \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{2}{(z-i)(z+i)} + \dots \right\}$$

$$= -\frac{1}{4} e^{k} \left\{ \frac{1}{(z-i)^2} + \cancel{\frac{2ik}{z-i}} - \frac{ik}{z-i} + \frac{i}{z-i} + \dots \right\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res} = -\frac{i}{4} e^{k} (1-k) \qquad \text{per } k<0.$$

tenendo conto della parità, $\hat{f}(k) = \hat{f}(-k)$, abbiamo quindi

$$\hat{f}(k) = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-i)}{4} e^{-|k|}(1+|k|) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-|k|} (1+|k|)$$

- effettivamente per $k \to \infty$ $\hat{f}(k)$ si annulla esponenzialmente

$$\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}'(k) = \begin{cases} e^{-k}(-1-k+1) = -e^{-k}k & \text{per } k>0 \\ e^{k}(1-k-1) = -e^{k}k & \text{per } k<0 \end{cases}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}''(k) = \begin{cases} e^{-k}(k-1) & \text{per } k>0 \\ -e^{k}(k+1) & \text{per } k<0 \end{cases}$$

- $\hat{f}'$ e $\hat{f}'' \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$
- $\hat{f}'''$ è discontinua in $k=0$

5)

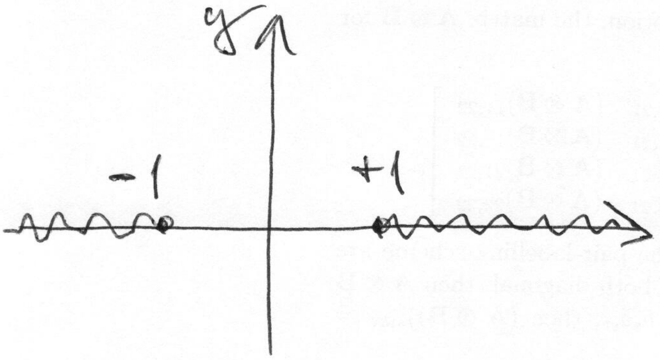
$$f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/3}$$

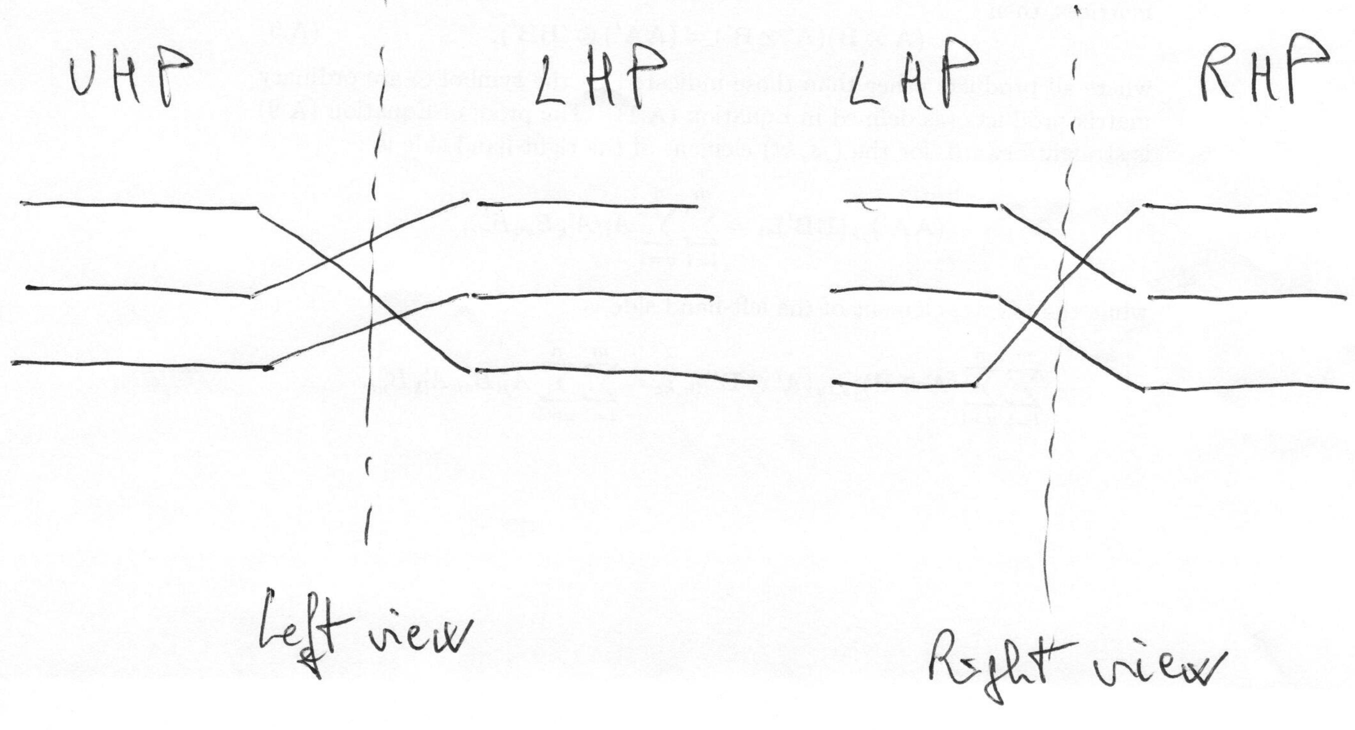
ci sono 2 punti di diramazione $z_1 = -1$, $z_2 = +1$
e 3 distinte diramazioni per $n = 1, 2, 3$:

$$f_n(z) = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{1/3} \exp\left[i\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{3}\right) + \frac{2\pi}{3}(n-1)\right]$$

r_i, ϑ_i : coordinate polari di z misurate a partire dai punti di diramazione z_i.

$n = n_1 - n_2 \pmod 3$ dove n_i è il numero di giri in senso antiorario attorno a z_i





6] **la trasformata di F. della parte principale.**

Se tanto insegna il rimetodo, vogliamo però per esercizio calcolarlo.

$$\langle \mathcal{F}\, \mathcal{P}\frac{1}{x-a} \,|\, \varphi\rangle = \langle \mathcal{P}\frac{1}{x-a} \,|\, \mathcal{F}\varphi\rangle =$$

$$= \int_0^\infty dx\, \frac{\tilde\varphi(a+x)-\tilde\varphi(a-x)}{x} = \int_0^\infty dx \int \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{e^{-i(a+x)y}-e^{-i(a-x)y}}{x}\, \varphi(y)$$

dove abbiamo utilizzato l'espressione "finale" della parte principale, data dal limite per $\varepsilon\to 0$ di altro posto. Poiché l'integrale in dx esiste propriamente possiamo scrivere utilizzando Fubini

$$\langle \mathcal{F}\, \mathcal{P}\frac{1}{x-a} \,|\, \varphi\rangle = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R dx \int \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{e^{-i(a+x)y}-e^{-i(a-x)y}}{x}\, \varphi(y)$$

$$= \lim_R \int \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}\, \varphi(y)\, e^{-iay} \int_0^R dx\, \frac{e^{-ixy}-e^{ixy}}{x}$$

ora $\displaystyle\int_0^R dx\, \frac{e^{-ixy}-e^{ixy}}{x} = -2i\int_0^R dx\, \frac{\sin xy}{x} = -i\int_{-R}^R dx\, \frac{\sin xy}{x}$

la funzione è dispari in y, valutiamola per $y>0$

$$\int_0^R dx\, \frac{\sin xy}{x} = \int_0^{Ry} du\, \frac{\sin u}{u} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

Quindi

$$\int_0^R dx\, \frac{e^{-ixy}-e^{ixy}}{x} \longrightarrow -i\pi\, \mathrm{sgn}(y)$$

Osserviamo che se potessimo portare il $\lim_{R\to\infty}$ sotto il segno di integrale saremmo arrivati a

$$\langle \mathcal{F}\, P\frac{1}{x-a} / \varphi \rangle = \int dy\, \varphi(y)\, e^{-iay} \frac{-i\pi}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sgn} y .$$

La trasformata richiesta sarebbe cioè la distribuzione regolare $-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-iay} \operatorname{sgn}(y)$, che è in effetti il risultato corretto. Il passaggio in discussione è, per il Teor. della conv. dominata, certamente legittimo se dimostriamo che $\exists\, C>0$:

$$\left| \int_0^R dx \frac{e^{-ixy} - e^{ixy}}{x} \right| \le C \quad \text{cioè} \quad \left| \int_0^R dx \frac{\sin xy}{x} \right| \le C$$

poiché allora $C|\varphi(y)|$ è la maggiorante integrabile.

Scopriamo tale limitazione ripercorrendo la dimostrazione ben nota di $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x} = \pi$. Sia $I_{R,\varepsilon} = (-R,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,R)$.

$$\int_{-R}^{R} dx \frac{\sin x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{I_{R,\varepsilon}} \frac{\sin x}{x} = -i \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{I_{R,\varepsilon}} \frac{e^{ix}}{x} =$$

$$= -i\left\{ \oint_\gamma dz \frac{e^{iz}}{z} + \lim_{\varepsilon\to 0} i\int_0^\pi d\theta\, e^{i\varepsilon e^{i\theta}} - i\int_0^\pi d\theta\, e^{iRe^{i\theta}} \right\}$$

$$= \pi - \int_0^\pi d\theta\, e^{iRe^{i\theta}} . \quad \text{Ma} \quad (R \ge 0)$$

$$\left| \int_0^\pi d\theta\, e^{iRe^{i\theta}} \right| \le \int_0^\pi d\theta\, e^{-R\sin\theta} \le 2\int_0^{\pi/2} d\theta\, e^{-\frac{R\theta 2}{\pi}} = \pi \frac{1-e^{-R}}{R} \le \frac{C_1}{1+R} \le C_2$$

evidentemente abbiamo $\left| \int_0^R \frac{\sin x}{x} \right| \le C_2$ e quindi

$$\left| \int_0^R dx \frac{\sin xy}{x} \right| = \left| \int_0^{Ry} dx' \frac{\sin x'}{x'} \right| \le C_2$$

Rispondiamo ora alla prima domanda.

$$\frac{1}{b}\langle \mathcal{F}(P\frac{1}{x+b} - P\frac{1}{x}) | \varphi\rangle = \int\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}\,\varphi(y)\,\frac{e^{iby}-1}{b}\,(-i\pi)\,\mathrm{sgn}(y)$$

osserviamo che

$$\left|\varphi(y)\,\frac{e^{iyb}-1}{b}\,\mathrm{sgn}(y)\right| = \left|y\varphi(y)\,\frac{e^{iyb}-1}{yb}\right| \leq C\,|y\,\varphi(y)| \in L_1$$

mentre per il T. conv. dominata concludiamo

$$\frac{1}{b}\langle \mathcal{F}(P\frac{1}{x+b} - P\frac{1}{x}) / \varphi\rangle \xrightarrow[b\to 0]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int dy\,\varphi(y)\,y\,\mathrm{sgn}(y).$$

per la completezza di $S'(\mathbb{R})$ questo è il risultato.

La seconda domanda ci chiede quindi di calcolare l'antitrasf. della distrib. regolare $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,y\,\mathrm{sgn}(y)$ in forma "conveniente".

$$\langle \mathcal{F}^{-1}\hat{T} / \varphi\rangle = \langle \hat{T} / \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle = \int dy\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,y\,\mathrm{sgn}(y)\int\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ixy}\,\varphi(x)$$

$$= \int dy\,\mathrm{sgn}(y)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\partial}{i\partial x}e^{ixy}\right]\varphi(x) =$$

$$= i\int dy\,\mathrm{sgn}(y)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ixy}\,\varphi'(x) \equiv \langle f / \mathcal{F}^{-1}\varphi'\rangle$$

$= \langle \mathcal{F}^{-1} f / \varphi'\rangle$ dove

f è la distrib. regolare $i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sgn}(y)$, la cui antitrasformata ~~in~~ in base a quanto visto inizialmente è $-P\frac{1}{x}$. Allora

$$\langle T / \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1} f / \varphi'\rangle = -\fint dx\,\frac{1}{x}\,\varphi'(x) = -\int_0^\infty dx\,\frac{\varphi'(x) - \varphi'(-x)}{x}$$

Si noti che questo è proprio il risultato "ingenuo", osservato che $\frac{d}{db}\frac{1}{x+b} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x+b}$ e trasportando le derivate nella funzione test con una integrazione per parti.

Da ultimo i due esempi numerici

$$\langle T | e^{-x^4} \rangle = + \int_0^\infty dx\, 2\cdot 4 \frac{x^3}{x} e^{-x^4} = +8 \int_0^\infty dx\, x^2 e^{-x^4} \qquad \boxed{(x^4 = t)}$$

$$= 2 \int_0^\infty dt\, t^{1/4} e^{-t} = 2\Gamma(5/4)$$

$$\langle T | e^{-x^2} \rangle = + \int_0^\infty dx\, 2\cdot 2 \frac{x}{x} e^{-x^2} = 4 \int_0^\infty dx\, e^{-x^2} = 4 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2\sqrt{\pi}.$$