Tema del 29-1-2019

1) $\oint_C dz \, \frac{e^{z/2} + |z|^2}{(z - i\pi)^2} = I_1 + I_2 \quad C = \{ z = i\pi + 2\pi e^{i\theta} \quad \theta \in [0, 2\pi] \}$

I_1 si calcola immediatamente usando il T. dei residui: traslliamo $z = i\pi + \xi$

$$I_1 = \oint d\xi \, e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\xi/2}}{\xi^2} = i \, 2\pi i \, \mathrm{Res}(\xi = 0)$$

$\mathrm{Res}(\xi = 0)$: $\frac{e^{\xi/2}}{\xi^2} = \frac{1}{2\xi} \Rightarrow \mathrm{Res} = \frac{1}{2}$

$$I_1 = i \, 2\pi i \, \frac{1}{2} = -\pi$$

Per I_2 occorre effettuare l'integrale curvilineo nel piano complesso

$$\oint_C d\xi \, \frac{|\xi + i\pi|^2}{\xi^2} = \oint_C d\xi \, \frac{-\pi^2 + |\xi|^2 + i\pi(\bar{\xi} - \xi)}{\xi^2}$$

$$= -\oint_C d\xi \, \frac{\pi^2}{\xi^2} + 4\pi^2 \oint d\xi \, \frac{1}{\xi^2} - i\pi \oint d\xi \, \frac{1}{\xi} + i\pi \oint d\xi \, \frac{\bar{\xi}}{\xi^2}$$

$$= 0 + 0 - i\pi(2\pi i) + i\pi \, i \int_0^{2\pi} d\theta \, e^{i\theta} \frac{e^{-i\theta}}{e^{2i\theta}}$$

$$= 2\pi^2 - \pi \int_0^{2\pi} d\theta \, e^{-2i\theta} = 2\pi^2 \Rightarrow I = 2\pi^2 - \pi$$

2) γ : $\mathrm{Re}\, z = 1$ $\quad \mathrm{Im}\, z > 0$

$w = \mathrm{Log}\, z$

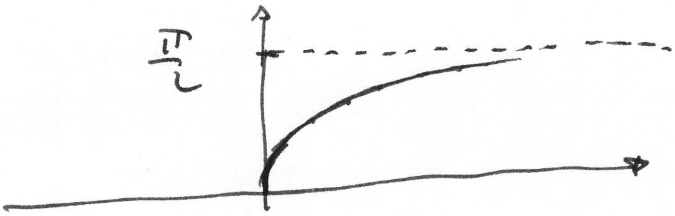
$\gamma = 1 + it \qquad t > 0$

$$w(t) = \mathrm{Log}(1+it) = \frac{1}{2}\log(1+t^2) + i\, tg^{-1} t$$

$\mathrm{Im}\, w(t) \in [0, \pi/2)$, $\mathrm{Re}\, w(t) \geq 0$

entrambe sono monotone crescenti di t.

$$\frac{dw(t)}{dt} = \frac{t}{1+t^2} + \frac{i}{1+t^2}$$ per $t=0$ $\frac{dw}{dt}$ è immaginario



l'angolo $\alpha(t)$ che fa $\frac{dw}{dt}$ con l'asse reale è

$tg^{-1}(\alpha(t)) = \frac{1}{t}$ decresce da $\frac{\pi}{2}$ per $t=0$

a 0 per $t \to +\infty$.

N.B. la curva $\begin{cases} u = \frac{1}{2}\log(1+t^2) \\ v = tg^{-1} t \end{cases}$ può essere fin

"tradizionalmente" posta in forma cartesiana

$\sqrt{e^{2u} - 1} = t$
$v = tg^{-1}\, t$ $\quad \Rightarrow \quad v = tg^{-1}\left(\sqrt{e^{2u} - 1}\right)$

3) $\hat{M}A = MA$

• aggiunto: $tr(B^T \hat{M} A) = tr.(B^T M A) = tr((M^T B)^T A)$

$= (\hat{M}^+ B, A)$

Quindi $\hat{M}^+ B = M^T B$

• Ker $\hat{M}$. Si verifica subito che $\det M = 0$, dunque $\ker \hat{M} \neq \{0\}$. Scritto $M = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \end{pmatrix}$, cioè tre vettori riga affiancati, si verifica subito che, ad esempio, $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + \underline{v}_3$

Allora $MA = \begin{pmatrix} \underline{v}_2 + \underline{v}_3 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \end{pmatrix} (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = 0 \iff \begin{cases} \underline{v}_2 \cdot \underline{e}_k = 0 \\ \underline{v}_3 \cdot \underline{e}_k = 0 \end{cases} \forall k.$

(Abbiamo scritto A come invece 3 vettori colonna)

occorre che quindi i ~~tre~~ due vettori $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ siano ortogonali a $\{\underline{e}_k\}_1^3 \Rightarrow \underline{e}_k = \alpha_k \dfrac{\underline{v}_2 \wedge \underline{v}_3}{|\underline{v}_2 \wedge \underline{v}_3|}$. $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

si calcola $\dfrac{\underline{v}_2 \wedge \underline{v}_3}{|\underline{v}_2 \wedge \underline{v}_3|} = \dfrac{1}{\sqrt{11}} (1, -1, -3) \equiv \underline{u}$

Quindi $\ker \hat{M}$ è dato da $(\alpha_1 \underline{u}, \alpha_2 \underline{u}, \alpha_3 \underline{u}) =$

$= \alpha_1 (\underline{u}, 0, 0) + \alpha_2 (0, \underline{u}, 0) + \alpha_3 (0, 0, \underline{u}) \equiv \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3$

Quindi $\dim(\ker \hat{M}) = 3$

Si verifica subito $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$. Quindi gli v_i

sono una base ortonormale in $\ker \hat{M}$.

Allora

$$\hat{P}A = \sum_1^3 v_i \, (v_i, A)$$

Esplicitando la traccia $(v_i, A) = \sum_k u_k A_{kr}$. Quindi

$$P \cdot A = \left(\underline{u}\, u_k A_{k1},\ \underline{u}\, u_{k'} A_{k'2},\ \underline{u}\, u_{k''} A_{k''3} \right)$$

(si è sottinteso la somma sui tre indici ripetuti)

quindi $(PA)_{sr} = u_s u_k A_{kr} = (P)_{sk} A_{kr}$

con $P_{sk} = u_s u_k$

P è la matrice di proiezione (su $\mathbb{R}_3$) relativa al

vettore $\underline{v}$.

- $P\,I$: $(P\,I)_{rs} = P_{rs} = u_r u_s$

4 a) $(D^2 \mathcal{F} F / \varphi) = (F / \mathcal{F} D^2 \varphi)$

calcoliamo $\mathcal{F} D^2 \varphi$:

$(D^2\varphi)(x) = \varphi''(x)$ $\quad (\mathcal{F}\varphi'')(\omega) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\omega} \varphi''(x)$

$= \lim_{L \to \infty} \int_{-L}^{L} \frac{dx \, e^{-ix\omega}}{\sqrt{2\pi}} \varphi''(x)$

A questo punto basta integrare due volte parti osservando che i termini di bordo si annullano per $L \to \infty$ essendo $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Quindi $(\mathcal{F}\varphi'')(\omega) = -\omega^2 \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\omega} \varphi = -\omega^2 \tilde{\varphi}(\omega)$

se X e' l'operatore, di moltiplicazione il membro di destra non e' altro che $-\hat{X}^2 \tilde{\varphi}$.

Quindi $(D^2 \mathcal{F} F / \varphi) = -(F / \hat{X}^2 \mathcal{F} \varphi) = (-\mathcal{F} \hat{X}^2 F / \varphi)$.

4 b) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty dx \, \frac{\sin nx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

Per il lemma di R. L. se $f \in L_1(\mathbb{R})$ $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, f \sin nx \to 0$

Il lemma non è però immediatamente usabile poiché

$\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ non definisce una funzione integrabile.

Bisogna in qualche modo separare la divergenza di $\frac{1}{x}$ nell'origine dal resto, resto che "buttiamo via" usando appunto il lemma.

Poniamo $$\int_0^\infty dx \, \frac{\sin nx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int_0^1 dx \, \frac{\sin nx}{x\sqrt{1+x^2}} + \int_1^\infty dx \, \frac{\sin nx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

il secondo addendo si annulla per $n \to \infty$ per il lemma.

consideriamo il primo addendo:

$$\int_0^1 dx \, \frac{\sin nx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int_0^1 dx \, \frac{\sin nx}{x} + \int_0^1 dx \, \frac{\sin nx}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right)$$

al secondo addendo possiamo di nuovo applicare il lemma. Siamo quindi restati con $\int_0^1 dx \, \frac{\sin nx}{x}$ a cui il lemma <u>non</u> si può applicare, ma che è però semplice da calcolare.

Infatti
$$\int_0^1 dx \frac{\sin Nx}{x} = \int_0^N dx \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}\int_{-N}^{N} dx \frac{\sin x}{x}$$

abbiamo quindi l'integrale improprio di $\frac{\sin x}{x}$, che abbiamo fatto durante il corso, e che lo studente poteva riprodurre. Comunque
$$\frac{1}{2}\int_{-N}^{N} dx \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$$