

Metodi Matematici della Fisica
29 gennaio 2018

Esercizio 1) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{1 + \cos^2 x} dx$$

Esercizio 2) Si determini, in dipendenza di $\alpha \in \mathbb{R}$, il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos(\alpha k) z^k$$

Esercizio 3) Sullo spazio di Hilbert $L^2([-1, 1])$ si consideri l'operatore lineare

$$(\hat{P}f)(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dy xy(3 + 5xy) f(y)$$

- i) si dimostri che \hat{P} è un proiettore;
- ii) si determini esplicitamente l'operatore $\exp(\lambda P)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, definito mediante la serie esponenziale. Di questo nuovo operatore si determinino inoltre autovalori e autovettori.

Esercizio 4) Mostrare esplicitamente che la norma dello spazio $L^1(\mathbb{R})$ non è Hilbertiana.

Esercizio 5a) Mostrare che la famiglia di funzioni

$$f(x) = \frac{1}{e^{\beta x} + 1}, \quad \beta > 0$$

converge a $\theta(-x)$ per $\beta \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

In alternativa:

Esercizio 5b) Si consideri la funzione $f(x) = \exp(-|x|)$.

- 1) Se ne determini lo sviluppo di Fourier in $L^2(-\pi, \pi)$.
- 2) Sapreste ottenere da tale sviluppo il valore di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$?