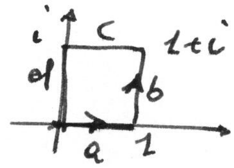
Tema del 26-9-18



1) Indicazioni: la funzione $|z|$ non è olomorfa, il risultato non è quindi zero! occorre effettuare, seppur con l'algebra dei numeri complessi, l'integrale curvilineo nel piano complesso (stile analisi 3!) la parametrizzazione dei 4 segmenti




è

a) $dz = dt$ $\quad z = t \quad |z| = t$

b) $dz = i\,dt$ $\quad z = 1+it \quad |z| = \sqrt{1+t^2}$

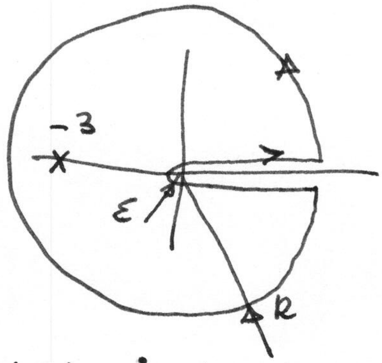
c) $dz = dt$ $\quad z = t+i \quad$ $t$ da 1 a 0

$|z| = \sqrt{1+t^2}$

d) $dz = i\,dt$ $\quad t$ da 1 a 0 $\quad |z| = t$

Per il calcolo di $\int_0^1 dt\,\sqrt{1+t^2}$ si ricordi la sostituzione $t = \operatorname{senh} v$.

2) Indicazioni:




si sceglie il taglio di $\sqrt[5]{\ }$ lungo l'asse reale positivo. Gli integrali lungo i due segmenti rettilinei, per $R \to \infty$ e $\varepsilon \to 0$, diventano uno l'integrale da 0 a $\infty$ da calcolare, l'altro è ad esso proporzionale. Gli integrali lungo $\gamma_R$ e $\gamma_\varepsilon$ (2)

tendono a zero per $R \to \infty$ e $\varepsilon \to 0$ per Darboux.

L'integrale è determinato usando il T dei Residui, dal residuo in $z = -3$.

3) $Vx = \sum_1^\infty (u_n, x) u_{n+1}$

osserviamo che $\|Vx\|^2 = \sum_1^\infty |(u_n, x)|^2 = \|x\|^2$

segue subito che $V$ è limitato, anzi isometrico.

$\|Vx\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, quindi $V$ è invertibile, nel senso che è iniettivo.

$V$ è unitario? no, questo richiederebbe $RV = \mathcal{H}$, ma questo non è vero, poiché $RV^\perp$ è lo spazio monodimensionale generato da $u_1$.

Calcoliamo ora $V^+$:

$$(y, Vx) = (y, \sum_1^\infty (u_n, x) u_{n+1}) \overset{①}{=} \sum_1^\infty (u_n, x)(y, u_{n+1}) =$$

$$\overset{②}{=} (\sum_1^\infty (u_{n+1}, y) u_n, x) = (V^+ y, x)$$

Quindi $V^+ y = \sum_1^\infty (u_{n+1}, y) u_n$

In ① e ② abbiamo usato la continuità del prodotto interno rispetto alla norma.

Sappiamo che $U^+U = \mathbb{I}$ ma $UU^+ \neq \mathbb{I}$, perché appunto $U$ non è unitario. Infatti

$$UU^+x = \sum_1^\infty (u_n, U^+x)\, u_{n+1}$$

ma $(u_n, U^+x) = \left(u_n, \sum_m (u_{m+1}, x)\, u_{m+1}\right) = (u_{n+1}, x)$.

Quindi $\displaystyle UU^+x = \sum_1^\infty (u_{n+1}, x)\, u_{n+1}$.

$UU^+$ è cioè il proiettore sul Range di $U$.

4) occorre osservare che dobbiamo calcolare la $\mathcal{F}$-trasformata di $f * f$ (<u>la convoluzione</u>)

con $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Sappiamo allora che

$$\mathcal{F}(f * f) = \sqrt{2\pi}\,(\mathcal{F}f)^2$$

$\mathcal{F}f$ si calcola banalmente usando il T dei Residui (poli in $\pm i$) chiudendo "opportunamente" il cammino con una semicirconf. di raggio $R \to \infty$.

Il risultato è proporzionale a $e^{-|k|}$.

<u>N.B.</u> il risultato rispetta il teorema di Riemann-Lebesgue: $\tilde{f}(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

5a) $$\frac{\sin^2 kx}{\pi\, k\, x^2} = f_k$$

$$\langle f_k, \varphi \rangle = \frac{1}{\pi}\int \frac{\sin^2 kx}{k x^2}\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\varphi\left(\frac{t}{k}\right)dt$$

La cosa piu' veloce ora e' di osservare che essendo $\varphi \in S(\mathbb{R})$

$$\exists\, C: \left|\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\right| \leq C$$

allora $\left|\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\right| < C\,\frac{\sin^2 t}{t^2} \in L_1(\mathbb{R})$

possiamo usare il T della converg. dominata e

concludere $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi}\int \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\varphi\left(\frac{t}{k}\right)dt =$

$$= \varphi(0)\,\frac{1}{\pi}\int\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

5b) i) $(Vf)(x) = \sqrt{\frac{a}{b}}\, f\left(x\frac{a}{b}\right)$



Allora $(Vg, Vf)_b = \frac{a}{b} \int_0^b f\left(x\frac{a}{b}\right) \bar{g}\left(x\frac{a}{b}\right) dx$

$$= \int_0^a f(t)\, \bar{g}(t)\, dt = (g, f)_a$$

Quindi $V$ conserva il prodotto interno, inoltre evidentemente ogni funzione $g \in L^2[0,b]$ può essere scritta nella forma $\sqrt{\frac{a}{b}}\, f\left(x\frac{a}{b}\right)$, e $f \in L^2[0,a]$ determinata da $g(x) = \sqrt{\frac{a}{b}}\, f\left(x\frac{a}{b}\right)$. Quindi $V$ è anche surgettivo, è quindi un isomorfismo.

Se quindi $\{u_n\}$ è un s.o.n.c. in $L^2[0,a]$ $\{Vu_n\}$ lo è in $L^2[0,b]$

ii) se $\{\cos nx\}_0^\infty$ $\{\sin nx\}_1^\infty$ sono una base ortogonale in $L^2[0,\pi]$, per il punto i) possiamo affermare che $\{\cos\left(nx\frac{2\pi}{b}\right), \sin\left(nx\frac{2\pi}{b}\right)\}$ lo sono in $L^2[0,b]$. La risposta alla domanda ii) è allora che $\{\cos(6nx), \sin(6nx)\}$ sono una <u>base ortogonale</u> in $L^2[0,\frac{\pi}{3}]$ (anche se sono un <u>sistema ortogonale</u> anche in $L^2[0, s\frac{\pi}{3}]$, $s = 1, 2, 3$ etc )