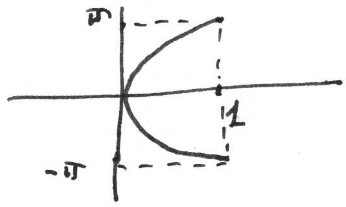
4 Luglio 2018

1)



$$z(t) = \frac{t^2}{\pi^2} + it$$

$$dz = \left(\frac{2}{\pi^2} t + i\right) dt$$

per quanto riguarda $f(z) = e^{iz} = \frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{i}$

$$\int_\gamma dz\, f(z) = \left.\frac{e^{iz}}{i}\right|_{1-i\pi}^{1+i\pi} = -i\left(e^{i}\left(e^{-\pi} - e^{\pi}\right)\right)$$

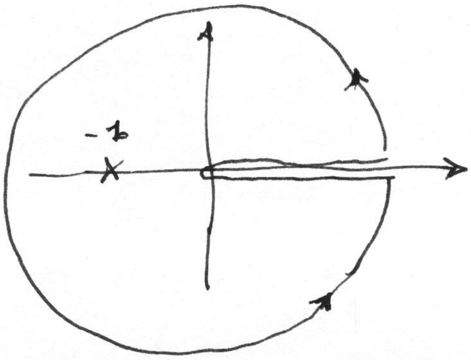
dipende solo dal punto iniziale e finale di γ.

Invece $\int_\gamma dz \left|e^{iz}\right| = \int_{-\pi}^{\pi} dt \left(\frac{2}{\pi^2} t + i\right) \left| e^{i\left(\frac{t^2}{\pi^2} + it\right)}\right|$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dt \left(\frac{2}{\pi^2} t + i\right) e^{-t} = \ldots$$

2) Facendo il cambio di variabili suggerito l'integrale ~~si~~ si riscrive come $\frac{1}{3} \int_0^\infty dx \frac{x^{-1/3}}{1+x}$

Può essere calcolato con il "key hole", si veda il libro.



3) I vettori colonna (o quelli riga) sappiamo che per una rotazione sono tre vettori reali e ortonormali. Per la nostra matrice allora

$$\begin{bmatrix} a & d & f \\ b & 1 & g \\ c & e & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \, , \underline{v}_2 \, , \underline{v}_3 \end{bmatrix}$$

$\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 = 1 \Rightarrow d = e = 0$

$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 0$ comporta allora $b = 0$, e quindi poiché dal testo sappiamo $a \geq 0$ $b \geq 0$ $c \geq 0$ abbiamo

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \sqrt{1-a^2} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad 0 \leq a \leq 1$$

$\underline{v}_3 \cdot \underline{v}_2 = 0 \Rightarrow g = 0 \Rightarrow f = \pm\sqrt{1-a^2}$

$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_3 = 0 \Rightarrow f = -\sqrt{1-a^2}$. Quindi $\begin{bmatrix} a & 0 & -\sqrt{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{1-a^2} & 0 & a \end{bmatrix}$

è la nostra rotazione.

Vediamo che $R \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, abbiamo quindi una rotazione attorno all'asse y di un angolo ϑ con

$a = \cos\vartheta \qquad R = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{bmatrix}$

punto iii)

$$R^5 = \begin{bmatrix} \cos 5\vartheta & 0 & -\sin 5\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 5\vartheta & 0 & \cos 5\vartheta \end{bmatrix}$$

occorre ora esprimere $\cos 5\vartheta$ e $\sin 5\vartheta$ mediante $a = \cos\vartheta$

$$(e^{i\vartheta})^5 = \left(a + i\sqrt{1-a^2}\right)^5 \Rightarrow \cos 5\vartheta = \mathrm{Re}\left(a + i\sqrt{1-a^2}\right)^5$$

$$\Rightarrow \cos 5\vartheta = a^5 - \binom{5}{2} a^3 (1-a^2) + \binom{5}{4} a (1-a^2)^2$$

$$= 16 a^5 - 20 a^3 + 5a$$

analog. $\sin 5\vartheta = \left[5a^4 + 10 a^2(1-a^2) + (1-a^2)^2\right]\sqrt{1-a^2}$

4) caso M finito

$$F \cdot a = \sum_1^M \frac{a_n}{\sqrt{n}}$$

Per Schwartz
$$|F \cdot a| \le \left(\sum_1^M \frac{1}{n}\right)^{1/2} \left(\sum_1^M |a_n|^2\right)^{1/2}$$
$$\le \left(\sum_1^M \frac{1}{n}\right)^{1/2} \|a\|_{\ell^2(\mathbb{C})}$$

il funzionale è quindi limitato, prendendo la successione $a = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \ , \frac{1}{\sqrt{M}}, 0, 0, 0 \ldots\right)$

la disuguaglianza è sostituita dall'uguaglianza.

Quindi $\|F\| = \left(\sum_1^M \frac{1}{n}\right)^{1/2}$

caso $M = \infty$

$$F \cdot a = \sum_1^\infty \frac{a_n}{\sqrt{n}}$$

consideriamo la famiglia di successioni $a^{(M)} \in \ell_2(\mathbb{C})$

definite da $a^{(M)}_n = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{M}}, 0, 0, \dots\right)$

$$F \cdot a^{(M)} = \sum_1^M \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_1^M \frac{1}{n} = \| a^{(M)} \|^2$$

Quindi $\dfrac{|F \cdot a^{(M)}|}{\| a^{(M)} \|} = \| a^{(M)} \| \xrightarrow[M \to \infty]{} \infty$

F <u>non</u> è perciò limitato.

5a) $\langle f, \varphi \rangle = \int_{-2}^{\infty} dx \, \dfrac{\varphi(x)}{1 + |x|}$

la linearità è ovvia, dimostriamo la continuità.

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \int_{-2}^{\infty} dx \, \frac{1}{(1+x^2)(1+|x|)} (1+x^2) |\varphi(x)|$$

$$\leq \left(\|\varphi\|_{0,0} + \|\varphi\|_{2,0} \right) \int_{-2}^{\infty} dx \, \frac{1}{(1+x^2)(1+|x|)}$$

$$\langle f', \varphi \rangle =: -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{-2}^{\infty} dx \, \frac{1}{1+|x|} \varphi'(x)$$

$$= -\int_{-2}^{0} dx \, \frac{1}{1-x} \varphi'(x) - \int_{0}^{\infty} dx \, \frac{1}{1+x} \varphi'(x) =$$

$$= - \left. \frac{\varphi(x)}{1-x} \right|_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} dx \, \frac{\varphi(x)}{(1-x)^2}$$

$$- \left. \frac{\varphi(x)}{1+x} \right|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} dx \, \frac{\varphi(x)}{(1+x)^2} =$$

$$= -\varphi(0) + \frac{\varphi(-2)}{3} + \varphi(0) + \int_{-2}^{0} dx \, \frac{\varphi(x)}{(1-x)^2} - \int_{0}^{\infty} dx \, \frac{\varphi(x)}{(1+x)^2}$$

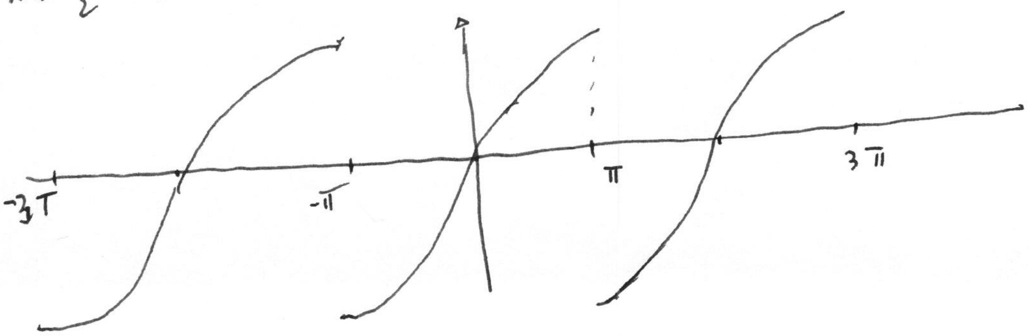
$$= \frac{1}{3} \varphi(-2) + \int_{-2}^{0} dx \, \frac{\varphi(x)}{(1-x)^2} - \int_{0}^{\infty} dx \, \frac{\varphi(x)}{(1+x)^2}$$

Quindi $f'(x) = \frac{1}{3} \delta_{-2}(x) + \frac{\chi_{[-2,0]}(x)}{(1-x)^2} - \frac{\Theta(x)}{(1+x)^2}$

con Θ = theta di Heaviside

χ_I = funzione caratteristica dell'intervallo I.

5b) La funzione in oggetto di studio è la funzione $\sin\frac{x}{2}$ in $x \in [-\pi, \pi]$, poi è prolungata per periodicità:



è quindi una funzione discontinua. Poiché è dispari abbiamo una serie in seni

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} b_n \sin n x$$

con $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin n x \sin \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} dx \sin n x \sin \frac{x}{2}$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx \left\{ \cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right\}$$

$$= \frac{(-)^{n+1}}{\pi} \frac{2n}{n^2 - 1/4}$$

Per il $\underline{I}$ del Dini la serie converge puntualmente a $\sin \frac{x}{2}$ per $x \neq \pi \pmod{2\pi}$, in $x = \pi$ converge alla media aritmetica delle discontinuità, cioè a zero, cosa banalmente verificata.

Per $x = \frac{3}{2}\pi$ la serie <u>non</u> converge a $\sin \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ma, come mostra il disegno, converge a $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.