19 Luglio 2018

1) $\dfrac{\mathrm{Log}(-z)}{(z^2-1)^2}$ parte principale in $z=-1$

In $z=-1$ c'è un polo. poniamo $w=z+1$ $z=w-1$

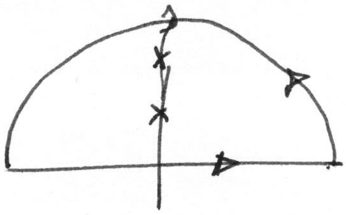
$$\frac{\mathrm{Log}(1-w)}{\left[(w-1)^2-1\right]^2}=\frac{\mathrm{Log}(1-w)}{(-2w+w^2)^2}=\frac{-w+\dots}{w^2(-2+w)^2}=$$

$$=\frac{-1+\dots}{w(-2+w)^2}\qquad \text{p.p}=-\frac{1}{4\cdot w}$$

2) $\displaystyle\int_0^{\infty}dx\,\frac{\cos\pi x}{x^4+5x^2+4}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\frac{e^{i\pi x}}{x^4+5x^2+4}$

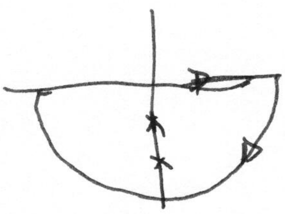
(l'integrale con il $\sin\pi x$ è infatti nullo)

il denominatore ha radici $\pm 2i$ $\pm i$, basta allora considerare



e applicare il teorema dei residui.

Se si prende $e^{-i\pi x}$ occorre naturalmente considerare:



3) $\exp\begin{bmatrix} 0 & -\vartheta \\ \vartheta & 0 \end{bmatrix}$ occorre per prima cosa "calcolarla".

$\equiv \exp(\vartheta M)$

consideriamo $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, per il teorema

di Hamilton-Cayley $M^2 = a\mathbb{1} + bM$.

Essendo l'esponenziale definito attraverso la sua

serie $\exp \vartheta M = a(\vartheta)\mathbb{1} + b(\vartheta)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Adesso si possono seguire più strade. Ad es. posso

usare (osservando che $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = -\mathbb{1}$) il fatto che

$$a'(\vartheta)\mathbb{1} + b'(\vartheta)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = M e^{\vartheta M} = a(\vartheta)M + bM^2$$

$$= aM - b\mathbb{1}.$$

poiché M ed $\mathbb{1}$ sono linearmente indipendenti abbiamo

$$\begin{cases} a'(\vartheta) = -b(\vartheta) \\ b'(\vartheta) = a(\vartheta) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a(0) = 1 \\ b(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} a(\vartheta) &= \cos\vartheta \\ b(\vartheta) &= \sin\vartheta \end{aligned}$$

Quindi $\exp \vartheta M = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & 0 \\ 0 & \cos\vartheta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Il fatto che $\frac{d}{d\vartheta} e^{\vartheta M} = M e^{\vartheta M}$ si dimostra facilmente usato i limiti nel senso delle norme degli operatori, con M op. limitato:

$$\left\| \frac{e^{(\vartheta+\Delta\vartheta)M} - e^{\vartheta M} - M e^{\vartheta M}\Delta\vartheta}{\Delta\vartheta} \right\| \le \left\| \frac{e^{\Delta\vartheta M} - 1 - M\Delta\vartheta}{\Delta\vartheta} \right\|$$

$$\le \Delta\vartheta \left\| \sum_0^\infty \frac{M^{2+k}\Delta\vartheta^k}{(2+k)!} \right\| \le \Delta\vartheta \sum_0^\infty \frac{|\Delta\vartheta|^k \|M\|^{2+k}}{(2+k)!} \to 0$$

(la serie ha raggio di convergenza ∞)

sia $\begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \equiv R(\vartheta)$ (è una rotazione nel piano)

e $V_\vartheta f = f(R^{-1}(\vartheta)\underline{x})$

$$\int |f(R^{-1}(\vartheta)\underline{x})|^2 d^2x = \int |f(\underline{x}')|^2 d^2x'$$

(la Jacobiano è uno). L'operatore è isometrico ma il range è evidentemente tutto lo spazio: abbiamo un op unitario.

$(V_\pi f)(x) = f(-x,-y)$

cioè V_π è l'inversione, per cui $V_\pi^2 = \mathbb{I}$. allora

$$V_\pi f = \lambda f \Rightarrow V_\pi^2 f = \lambda^2 f \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$\lambda = +1$ sono le funzioni pari, $\lambda = -1$ le dispari.

4) $$(F+F^{+})f = \sum_{0}^{\infty}\left((-i)^{n} + i^{n}\right)(h_n, f)\, h_n$$
$$= 2\sum_{0}^{\infty}(i)^{2n}(h_{2n}, f)\, h_n$$

$(F+F^{+})f = 0 \iff (h_{2n}, f) = 0 \quad \forall n$

le h_n hanno la parità di n. Allora $\forall f \in L^2$
$$f = \sum_{0}^{\infty}(h_{2n}, f)\, h_{2n} + \sum (h_{2n+1}, f)\, h_{2n+1}$$
$$\equiv f_S + f_A$$

f_S è simmetrica sotto inversione (pari) e f_A antisimmetrica (dispari)

Da questa scrittura vediamo che $(h_{2n}, f) = 0 \ \forall n$ è equivalente a dire che f è dispari. Quindi il kernel è fatto dalle funzioni dispari. Il proiettore è $f \mapsto \sum_{0}^{\infty}(h_{2n}, f)\, h_{2n}$.

$$\|(F+F^{+})f\|^2 = 4\sum_{0}^{\infty}|(h_{2n}, f)|^2 \leq 4\|f\|^2$$

$\Rightarrow \|F+F^{+}\| \leq 2$ prendendo la f $f = h_{2m}$ si satura la limitazione $\Rightarrow \|F+F^{+}\| = 2$.

5a) $\langle F_n, \varphi \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$

osservo che il membro di dx è una delle successioni (un caso particolare) che definisce l'integrale di Riemann, che certamente esiste per $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Quindi $\langle F_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 dx\, \varphi(x)$ (*)

cioè F_n converge alla distrib. regolare data dalla funzione caratteristica dell'intervallo $[0,1]$.

supponiamo ora di non aver riconosciuto l'integrale di Riemann e "dimostriamo" la (*).

osserviamo che $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 dx\; \varphi_n(x)$

con $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \chi_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(x)$

(dove χ_I indica la funzione caratteristica dell'intervallo I)

il termine che abbiamo tralasciato nella somma, per $k = n$, però singolarmente $\to 0$ per $n\to\infty$, e ce ne disinteressiamo.

allora $\int_0^1 dx \left(\varphi(x) - \varphi_n(x)\right) = \int_0^1 dx\, \frac{1}{n}\, \varphi'\left(\frac{k+\xi}{n}\right)$

dove abbiamo usato Lagrange, e quindi $\xi \in [0,1]$

Poiché $\exists\, C : |\varphi'(x)| < C$

abbiamo $\left| \int_0^1 dx \left(\varphi(x) - \varphi_n(x)\right)\right| \leq \frac{C}{n} \to 0$

5b) $f \rightsquigarrow \int dx \frac{1}{\sqrt{1+(x-n)^2}} f(x) \equiv \int dx\, \varphi_n(x) f(x) \equiv F_n f$

notiamo che $\varphi_n \in L^2(\mathbb{R})$ abbiamo allora che il funzionale è limitato e

$\left| \int dx\, \varphi_n(x) f(x) \right| \leq \|\varphi_n\| \|f\|$

prendendo per f proprio φ_n vale il segno di $=$.

Quindi la norma del funzionale è proprio

$\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{1+x^2} \right\}^{1/2} = \sqrt{\pi}.$

indipendente da n, e quindi falso che in norma la successione dei funzionali abbia limite nullo.

Domanda facoltativa: è vero però $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$

$\int \frac{1}{\sqrt{1+(x-n)^2}} f(x) \to 0$?

La risposta è sì. Se intanto $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$

allora $\left| \frac{1}{\sqrt{1+(x-n)^2}} f(x) \right| < |f(x)| \in L_1$

per il I teo. conv. dominata allora

$$\int \frac{1}{\sqrt{\dots}} f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

sia ora $f \in L_2$, poiché L_1 è denso in L_2

(o meglio $L_1 \cap L_2$ è denso in L_2) esiste $g \in L_1 \cap L_2$

: $\| f - g \| < \varepsilon/\sqrt{\pi}$

Allora $F_n f = F_n (f-g) + F_n g$

$$\begin{aligned} \| F_n f \| &\leq \| F_n (f-g) \| + \| F_n g \| \\ &\leq \sqrt{\pi}\, \| f - g \| + \| F_n g \| \\ &\leq \varepsilon + \| F_n g \| \end{aligned}$$

e per n abbastanza grande è vale $\| F_n g \| < \varepsilon$

quindi $\| F_n f \| < 2\varepsilon$.