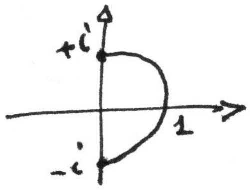
1)

γ: 

$\gamma(t) = e^{it} \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$d\gamma = i e^{it}\, dt$

consideriamo $$\int_\gamma dz\,(z+|z|) = 1\int_\gamma dz + \int_\gamma dz\, z =$$

$$= z\Big|_{-i}^{i} + \frac{z^2}{2}\Big|_{-i}^{i} = 2i + 0 = 2i$$

non abbiamo usato la parametrizzazione che il modo un po' indiretto in $\int dz\,|z|$. $\int dz\, z$ non dipende dal cammino essendo z olomorfa, dipende solo dal suo punto iniziale e finale. Lo stesso discorso vale per $\mathrm{Log}\, z = \frac{d}{dz}(z\,\mathrm{Log}\, z - z)$

e $\sin z = -\frac{d}{dz}\cos z$.

2) $$I = \int_0^{2\pi} dx\, \frac{\sin x + \cos x}{2+\sin x} = \int_0^{2\pi} dx\, \frac{\sin x}{2+\sin x} + \log(2+\sin x)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \int_0^{2\pi} dx\, \frac{\sin x}{2+\sin x} = \int_0^{2\pi} dx\, \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{4i + e^{ix}-e^{-ix}}$$

$$= \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} dx\, i e^{ix}\, \frac{1-e^{-2ix}}{4i+e^{ix}-e^{-ix}} = \frac{1}{i}\oint dz\, \frac{1-z^{-2}}{4i+z-\frac{1}{z}}$$

$$= -i\oint_\gamma dz\, \frac{z^2-1}{(z^2+4iz-1)z}$$ con γ = cerchio unitario

A questo punto basterà usare il teorema dei residui $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_{2,3} = (-2\pm\sqrt{3})\,i \end{cases}$

solo $z_1=0$ e $z_2=(-2+\sqrt{3})i = \frac{-i}{2+\sqrt{3}}$ sono in $|z|<1$ ②

e contribuiscono. L'integrando può essere riscritto come

$$\frac{z^2-1}{2i\sqrt{3}\,z}\left[\frac{1}{z+(2-\sqrt{3})i} - \frac{1}{z+i(2+\sqrt{3})}\right]$$

da cui i residui $R_1 = -\frac{1}{2i\sqrt{3}}\left[\frac{1}{(2-\sqrt{3})i} - \frac{1}{i(2+\sqrt{3})}\right] = 1$

$$R_2 = \frac{-(\sqrt{3}-2)^2-1}{2i\sqrt{3}\,(\sqrt{3}-2)i} = \frac{1+(2-\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}\,(\sqrt{3}-2)} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Quindi

$$I = -i\int_\gamma dz \ldots = -i\,2\pi i\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)2\pi.$$

$$= 2\pi\,\frac{3-2\sqrt{3}}{3} = -\frac{2\pi}{3+2\sqrt{3}} < 0$$

In effetti $\int_0^{2\pi} dx\,\frac{\sin x}{2+\sin x} = \int_{-\pi}^{\pi} dx\,\frac{\sin x}{2+\sin x} = -\int_0^{\pi} dx\,\frac{\sin^2 x}{4-\sin^2 x} < 0$

3) $(B,A) = \mathrm{tr}(B^\dagger A)$ con $B^\dagger = (\overline{B})^T$

$K_M : A \mapsto MA$

$(B, K_M A) = \mathrm{tr}(B^\dagger M A) = \mathrm{tr}((M^\dagger B)^\dagger A) = (M^\dagger B, A)$

$\Rightarrow K_M^\dagger B = M^\dagger B$

questa è la risposta alla prima domanda.

Per la domanda ii) per $n=3$ si assegna una specifica matrice M e si chiede se K_M è un proiettore ortogonale.

Si verifica subito che $M^2 = M$ e $M^\dagger = M$, quindi la matrice M definisce un proiettore su $\mathbb{C}^3$.

Questo non è ancora però la risposta.

Notiamo che se $M^\dagger = M$ allora K_M, calcolato nella domanda i), risulta hermitiano; inoltre

$$(K_M)^2 B = M K_M B = M^2 B = M B = K_M B \text{ se } M^2 = M.$$

Quindi effettivamente K_M risulta essere un proiettore.

Dobbiamo ora determinare la dimensione del suo spazio di proiezione. Consideriamo la matrice M, verifichiamo $\operatorname{Tr} M = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$, sappiamo che allora la dimensione del range di M è 1.

Sappiamo allora che $\exists\, \underline{v} \in \mathbb{C} : M\underline{u} = \alpha \underline{v} \quad \forall u \in \mathbb{C}^3$.

Consideriamo ora MA e scriviamo la matrice 3×3 A come tre vettori colonna affiancati. Allora

$MA = M(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$. Il prodotto righe x colonna implica che $MA = (M\underline{a}_1, M\underline{a}_2, M\underline{a}_3)$

e quindi $MA = (\alpha_1 \underline{v}, \alpha_2 \underline{v}, \alpha_3 \underline{v}) =$

$= \alpha_1 (\underline{v}, 0, 0) + \alpha_2 (0, \underline{v}, 0) + \alpha_3 (0, 0, \underline{v})$

poiché le tre matrici $(\underline{v}, 0, 0)$, $(0, \underline{v}, 0)$ e $(0, 0, \underline{v})$ sono linearmente indipendenti concludiamo che la dimensione dello spazio di proiezione di K_M e' 3.

4)
$$\sum_0^{\infty} \frac{\cos n z}{e^n + 1} = \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \left[\frac{e^{inz}}{e^n + 1} + \frac{e^{-inz}}{e^n + 1} \right]$$

per $\Im m\, z \in [-1+\delta, 1-\delta]$ $(\delta > 0)$

$\sum_0^{\infty} \frac{e^{\pm inz}}{e^n + 1}$ convergono e convergono uniformemente.

Infatti
$$\left| \frac{e^{\pm inz}}{e^n + 1} \right| \leq \frac{e^{+n(1-\delta)}}{e^n + 1} \leq e^{-n\delta}$$

ed il criterio di Weierstrass certifica l'affermazione fatta.

D'altra parte se $|\Im m\, z| \geq 1$
$$\frac{e^{-n \Im m z} + e^{n \Im m z}}{e^n + 1} \not\to 0$$

quindi la serie non converge.

Per $|\Im m\, z| < 1$ concludiamo per il noto Teorema che

$$\frac{d}{dz} \sum_0^{\infty} \frac{\cos n z}{e^n + 1} = - \sum_0^{\infty} \frac{n \sin n z}{e^n + 1}$$

Domanda facoltativa (5)

sappiamo che, dove la serie converge, è uguale a

$$f = \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty} \frac{e^{inz}}{e^{n}+1} + \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty} \frac{e^{-inz}}{e^{n}+1} =$$

consideriamo il primo termine:

$$\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty} e^{inz}\left(\frac{1}{e^{n}+1} - \frac{1}{e^{n}} + \frac{1}{e^{n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\left(e^{iz-1}\right)^{n} - \frac{1}{2}\sum \frac{e^{inz}}{e^{n}(e^{n}+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{e}{e-e^{iz}} - \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\frac{e^{inz}}{e^{n}(e^{n}+1)}$$

tenendo conto dell'altro addendo concludiamo che $|\mathrm{Im}\, z|<1$

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{e-e^{iz}} + \frac{e}{e-e^{-iz}}\right) - \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\frac{e^{inz}}{e^{n}(e^{n}+1)} - \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\frac{e^{-inz}}{e^{n}(e^{n}+1)}$$

l'addendo in ( ) ha un polo in $z = \pm i + 2k\pi$, la somma del 2° e 3° addendo, le due serie, ripetendo il ragionamento di partenza, descrive una funzione olomorfa per $|\mathrm{Im}\, z|<2$: Abbiamo quindi ottenuto un prolungamento analitico tra $|\mathrm{Im}\, z|<1$ e $|\mathrm{Im}\, z|<2$, la seconda funzione scritta è uguale infatti alla prima per $|\mathrm{Im}\, z|<1$. È chiaro che il procedimento può essere iterato e si arriva a dimostrare

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{iz}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{e^{n}-e^{iz}} + e^{-iz}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{e^{n}-e^{-iz}}\right)$$

5a) $\langle f_a, \varphi \rangle = \int_a^\infty dx\, \varphi(x)$ $\quad (f_a(x) = \Theta(x-a))$

$\langle \mathcal{F}^2 f_a, \varphi \rangle =: \langle f_a, \mathcal{F}^2 \varphi \rangle$

ma $(\mathcal{F}^2 \varphi)(x) = \varphi(-x)$. Quindi $\langle \mathcal{F}^2 f_a, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{-a} dx\, \varphi(x)$

consideriamo ora $a^k \langle f_a, \varphi \rangle$ il caso non banale è $k > 0$.

riscriviamo come $\dfrac{\int_a^\infty dx\, \varphi(x)}{a^{-k}}$ è una forma

indeterminato $\frac{0}{0}$. Applichiamo il I teo. dell'Hôpital

considerando $\dfrac{\frac{d}{da}\int_a^\infty dx\, \varphi(x)}{\frac{d}{da}a^{-k}} = \dfrac{-\varphi(a)}{(-k)\,a^{-k-1}} = \frac{1}{k} a^{k+1}\varphi(a) \to 0$

perché φ è a decrescenza rapida.

5b) $\lim_{k\to\infty} k \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}\, e^{-ikx}$

Per il Lemma di Riemann-Lebesgue sappiamo che l' $\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots$

ha limite nullo, ma $k \to \infty$.

Abbiamo visto che se f è, non solo di L_1, ma è

derivabile, e le sue derivate, prima, seconde etc. sono di

L_1, allora il risultato del Lemma può essere rafforzato.

la cosa si concretizza in una integrazione per parti:

$$k \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\sin(x^2)}{(1+x^2)^{3/2}} \, e^{-ikx} = i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\sin(x^2)}{(1+x^2)^{3/2}} \, \frac{d}{dx} e^{-ikx}$$

$$\overset{1}{=} \lim_{a \to \infty} i \int_{-a}^{a} dx \, \frac{\sin(x^2)}{(1+x^2)^{3/2}} \, \frac{d}{dx} e^{-ikx} =$$

$$= i \lim_{a \to \infty} \left\{ \frac{\sin(a^2)}{(1+a^2)^{3/2}} \left(e^{-ika} - e^{ika} \right) - \int_{-a}^{a} dx \, e^{-ikx} \frac{d}{dx} \frac{\sin(x^2)}{(1+x^2)^{3/2}} \right\}$$

$$= \lim_{a \to \infty} -i \int_{-a}^{a} dx \, e^{-ikx} \left\{ \frac{2x \cos(x^2)}{(1+x^2)^{3/2}} - 3 \, \frac{x \sin(x^2)}{(1+x^2)^{5/2}} \right\} =$$

$$\overset{1}{=} -i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-ikx} \left\{ \frac{2x \cos(x^2)}{(1+x^2)^{3/2}} - 3 \, \frac{x \sin(x^2)}{(1+x^2)^{5/2}} \right\}$$

le uguaglianze 1 sono corrette per il Teorema della conv. dominata.

Osserviamo ora che la funzione in { }, essendo di L_1, permette l'utilizzo di nuovo del Lemma di R.L., e quindi il suo limite per $k \to \infty$ è nullo.