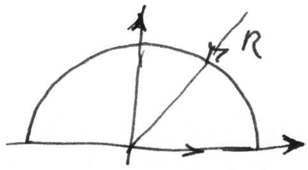
1) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \dfrac{e^{i\pi x}}{x^2-2ix-1}$. Siamo nelle condizioni del Lemma di Jordan e consideriamo quindi il cammino



per $R \to \infty$.

occorre un po' di attenzione poiché $x^2-2ix-1 = (x-i)^2$

abbiamo cioè un polo del secondo ordine.

Calcoliamo il residuo:

$$\frac{e^{i\pi z}}{(z-i)^2} = \frac{e^{i\pi(z-i)}\, e^{-\pi}}{(z-i)^2} = e^{-\pi}\, \frac{1+i\pi(z-i)+o(z-i)}{(z-i)^2}$$

$\Rightarrow R = i\pi e^{-\pi}$

Quindi $I = 2\pi i \, i\pi e^{-\pi} = -2\pi^2 e^{-\pi}$.

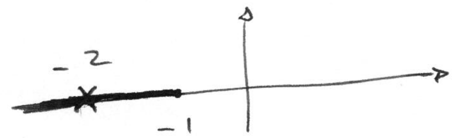
Abbiamo ottenuto un numero reale, è corretto?

notiamo che $\bar{I} = \int dx \, \dfrac{e^{-i\pi x}}{x^2+2ix-1}$ ponendo $x = -x'$

$\bar{I} = \int dx' \, \dfrac{e^{i\pi x'}}{x'^2-2ix'-1} = I$! è reale!

2) $f(z) = \dfrac{\mathrm{Log}(z+1)}{2+z}$

singolarità: taglio lungo l'asse reale negativo da $z=-1$ sovrapposto ad un polo semplice in $z=-2$.



$$f(z) = \sum_{0}^{\infty}{}' c_k z^k$$

$$\mathrm{Log}(1+z) = -\sum_{1}^{\infty}{}' \frac{(-z)^n}{n} \qquad \frac{1}{2+z} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}{}'\left(-\frac{z}{2}\right)^n$$

i c_k possono ottenersi dal prodotto di Cauchy delle due serie, quindi $c_n = \sum_{k=0}^{n}{}' a_k\, b_{n-k}$ cioè

$$c_n = -\frac{1}{2}\sum_{1}^{n} \frac{(-)^k}{k}(-)^{n-k}\, 2^{-(n-k)} = -\frac{1}{2}\,\frac{(-)^n}{2^n}\sum_{1}^{n}{}' \frac{2^k}{k}$$

da cui $c_0 = 0$, $c_1 = \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{8}\left(2+\frac{4}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ etc.

Raggio di convergenza: è dato dalla distanza della singolarità più vicina, che è quella in $z=-1$ $\Rightarrow$ $R = 1$

3) $O = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \|O\| = ?$

$$(a,b)\, O \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2a^2 + 5ab + b^2$$

Quindi $\quad \|O\| = \sup_{\|\underline{x}\|=1} \|Ox\| = \max_{\vartheta}$

$$O\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 4a+b \end{pmatrix} \qquad \cos 2\vartheta = 2\cos^2 - 1$$

$$\left\| O \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right\|^2 = (2a+b)^2 + (4a+b)^2 = 4a^2+b^2+4ab+16a^2+b^2+8ab$$

$$= 20a^2 + 2b^2 + 12ab$$

$$2 + 18\cos^2\vartheta + 12\cos\vartheta\sin\vartheta = 2 + 9\cos 2\vartheta + 9 + 6\sin 2\vartheta$$

$$= 11 + 9\cos 2\vartheta + 6\sin 2\vartheta$$

Vale il T spettrale, quindi $\underline{x} = \Sigma a_i \underline{u}_i$

con $O \underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i$ $\quad (u_i, u_j) = \delta_{ij}$ $\quad \|\underline{x}\| = \Sigma |a_i|^2 = (\Sigma a_i^2)$

Allora $\quad (\underline{x}, O^T O \underline{x}) = \Sigma' a_i a_j \; (u_i, O^T O u_j) =$

$= \Sigma \, a_i^2 \lambda_i \qquad$ con $\Sigma |a_i|^2 = 1$

Se λ_{MAX} è l'autovalore massimo la soluzione è prendere

$a_i = 1$ in corrispondenza di $i = MAX$, e gli altri nulli:

Ne consegue $\quad \|O\|^2 = \lambda_{MAX}$

$O^T O = \begin{bmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad$ gli autovalori sono $\quad 11 \pm 3\sqrt{13}$

4) $\quad f(x) = \sin x \qquad L^2[0, \pi/2]$

$F_{a,b} \equiv \| f - a u_1 - b u_2 \|^2 =$ minimo con $\quad u_1(x) = 1 \quad u_2(x) = x$

è possibile considerare il problema dalla sua definizione

$\frac{\partial F_{a,b}}{\partial a} = \frac{\partial F_{a,b}}{\partial b} = 0 \quad \Rightarrow \quad a, b = \ldots$

oppure più geometricamente osservare che u_1 e u_2 generano un sottospazio lineare chiuso (perché è finito-dimensionale) la soluzione del problema è allora la proiezione di f su questo sottospazio. Se cioè v_1 e v_2 sono una base ortonormale del sottospazio le soluzioni è:

$$v_1 (v_1, f) + v_2 (v_2, f)$$

v_1 e v_2 sono ottenuti con il procedimento di ortogonalizz. di G. S. : $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$, $v_2 = \frac{u_2 - (v_1, u_2) v_1}{\| u_2 - (v_1, u_2) v_1 \|}$

5a) $f_\beta = \tanh \beta x \xrightarrow[\beta \to \infty]{} \operatorname{sgn} x$ in $S'(\mathbb{R})$

notiamo che puntualmente $\tanh \beta x \to \operatorname{sgn} x$ per $x \neq 0$

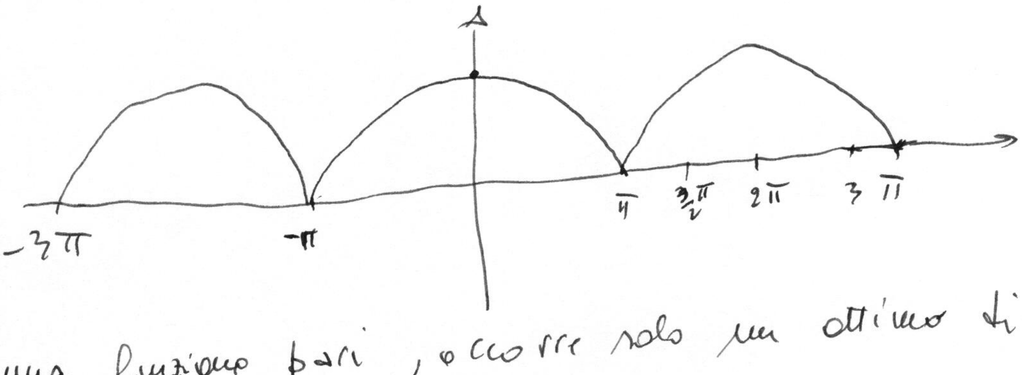
e che $|\tanh \beta x| \leq 1$ $\forall x$, considerato allora

$$\langle f_\beta, \varphi \rangle = \int \tanh \beta x \; \varphi(x)$$

abbiamo una maggiorante integrabile proprio in $|\varphi|$,

l'asserto segue allora dal $\underline{T}$ della conv. dominata.

5b) La funzione periodica in oggetto è



è una funzione pari , occorre solo un attimo di pazienza per calcolare

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{(-)^n}{n^2 - 1/4} \cos(n x)$$

l'identità di Parseval dà

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{1}^{\infty} a_n^2 .$$

quindi $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\frac{x}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{4}{\pi^2} + \frac{\pi}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1/4)^2}$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1/4)^2} = \pi$$

valore della somma in $x = \frac{3}{2}\pi$.

come dimostra il disegno la risposta <u>non</u> è

$\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, bensì $+\frac{1}{\sqrt{2}}$.